Normalisation en commande linéaire adaptative de B. Egardt à L. Praly

Laurent Praly

20 avril 2001

Abstract

Notre contribution sur la technique de normalisation utilisée en commande linéaire adaptative a été controversée. Nous donnons ici notre point de vue en situant notre apport dans la perspective de l'état de l'art lorsque nous avons abordé ce problème en 1981.

1 Énoncé du problème et état de l'art avant notre contribution

Considérons le régulateur proportionnel adaptatif :

$$\begin{aligned} \theta(k) &= \theta(k-1) + \frac{y(k-1)\,[y(k) - a_m y(k-1)]}{\gamma + y(k-1)^2} \\ u(k) &= (a_m - \theta(k))\, y(k) \end{aligned} \tag{1}$$

où u est la commande, y est la sortie mesurée et θ est l'état du régulateur, interprété dans ce qui suit comme un paramètre adapté et a_m est un nombre à choisir dans $(-1, 1)$, interprété comme le pôle souhaité pour la boucle fermée.

De façon nominale, ce contrôleur régule à 0 la sortie y du système :

$$y(k) = a\,y(k-1) + u(k-1) \tag{2}$$

En effet, Goodwin, Ramadge et Caines ont établi :

Proposition 3 ([1, Theorem 5.1]) *Pour toute condition initiale $(y(0), \theta(0))$, la suite (y, θ) correspondante, solution du système en boucle fermée (1)-(2), est bornée et la suite $y(k)$ est de carrés sommables.*

Par contre pour le système à réguler :

$$y(k) = a\,y(k-1) + u(k-1) + d(k) \tag{4}$$

avec d est une suite bornée (inconnue), Egardt a montré dans [3, Example 4.2] l'existence de solutions non bornées [3] lorsque le contrôleur (1) est utilisé. Par exemple, si $a_m = 0$, le triplet de suites :

$$y(k) \;=\; \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\;, \quad \theta(k) \;=\; \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\sqrt{\frac{i-1}{i}}\;, \quad d(k) \;=\; \varepsilon \left(\frac{1}{k} \;-\; \frac{a-\varepsilon \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i}\sqrt{\frac{i-1}{i}}}{\sqrt{i-1}} \right) \tag{5}$$

est, pour tout $\varepsilon > 0$, une solution du système bouclé (1)-(4). Or les suites y et d tendent vers 0, mais la suite θ tend vers $+\infty$. Notons que la suite d est aussi petite que nous voulons en norme ℓ^∞ et en norme ℓ^3.

Ce problème résulte d'une auto-corrélation trop forte de la suite d. En effet, considérons le cas où d est une moyenne mobile :

$$d(k) \;=\; \omega_k \;-\; \sum_{i=1}^{n} c_i \omega(k-i)$$

avec ω est un processus stochastique, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, adapté à la suite croissante des sous-sigma algèbres $\mathcal{F}_k$ engendrées par les observations des suites u et y jusqu'à l'instant k, et vérifiant, presque sûrement et pour tout i :

$$E\left\{\omega(i)|\mathcal{F}_{i-1}\right\} \;=\; 0\;, \quad E\left\{\omega(i)^2|\mathcal{F}_{i-1}\right\} \;=\; \sigma^2\;, \quad \sup_k \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\omega(i)^2 \;<\; +\infty\;.$$

Puisque la suite d n'est plus nulle qu'en moyenne, nous devons modifier la mise à jour de θ pour introduire cet effet de moyennisation. Une façon d'obtenir cette modification est de réaliser que le paramètre a dans l'équation (4) satisfait les équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(k) & = & a(k-1) \\ y(k) - u(k-1) & = & y(k-1)\,a(k-1) \;+\; d(k) \end{array} \right.$$

Pour le cas où les c_i sont nuls, la meilleure estimation $\theta(k)$ de $a(k)$ au sens du critère :

$$\min_\theta E\left\{(\theta - a(k))^2|\mathcal{F}_{k-1}\right\}$$

est donnée par le filtre de Kalman :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r(k) & = & r(k-1) \;+\; y(k-1)^2\;, \\ \theta(k) & = & \theta(k-1) \;+\; \dfrac{y(k-1)\left[y(k) - a_m y(k-1)\right]}{r(k)} \end{array} \right. .$$

Le régulateur proportionnel adaptatif stochastique considéré est alors :

$$\begin{array}{rcl} r(k) & = & r(k-1) \;+\; y(k-1)^2\;, \\ \theta(k) & = & \theta(k-1) \;+\; \dfrac{y(k-1)\;\left[y(k) - a_m y(k-1)\right]}{r(k)}\;, \\ u(k) & = & \left[a_m - \theta(k)\right] y(k)\;. \end{array} \tag{6}$$

Il est identique à (1) sauf que la constante γ a été remplacée par $r(k-1)$. Nous avons :

Proposition 7 ([2, Theorem 5.1]) *Si les coefficients c_i de la moyenne mobile sont tels qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout complexe z de module supérieur ou égal à 1, nous avons :*

$$\frac{1-\varepsilon}{2} \geq \textbf{\textit{Ré}} \left(\sum_{i=1}^{k} c_i z^i \right) ,$$

alors, pour toute condition initiale, $(y(0), \theta(0))$, la suite (y, θ) correspondante, solution du système en boucle fermée (6)-(4), est presque sûrement bornée au sens suivant :

$$\limsup_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} y(i)^2 + \theta(i)^2 < +\infty$$

et, presque sûrement, nous avons :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} E\left\{ y(i)^2 | \mathcal{F}_{i-1} \right\} = \sigma^2 .$$

L'intérêt du contre-exemple donné par la solution (5) est d'indiquer que le problème de non bornitude porte peut-être, et ceci de façon générale, non pas sur la suite y du système, mais sur l'état θ du contrôleur. Cette remarque justifie l'introduction dans le contrôleur d'un mécanisme empêchant cette non bornitude. Le mécanisme le plus direct est la projection sur un compact mais ce n'est pas le seul (voir [3, Theorem 4.3]) :

$$\begin{aligned} r(k) &= \lambda\, r(k-1) + \alpha\, y(k-1)^2 + \beta \\ \theta(k) &= \mathtt{sat}\left(\theta(k-1) + \tfrac{y(k-1)\ [y(k) - a_m y(k-1)]}{r(k)} \right) \\ u(k) &= (a_m - \theta(k))\, y(k) \end{aligned} \tag{8}$$

avec la fonction `sat` donnée par :

$$\mathtt{sat}(x) = \min\{a_{\max}, \max\{a_{\min}, x\}\}$$

où nous supposons connaître des réels $a_{\min}$ et $a_{\max}$ tel que le paramètre a du système à commander vérifie :

$$a \in [a_{\min}, a_{\max}] . \tag{9}$$

Notons aussi que nous avons introduit les paramètres $\lambda \in [0, 1]$, $\alpha \geq 1$ et $\beta > 0$ pour englober dans une même famille les algorithmes (1) et (6). Dans ce contexte, Egardt a établi :

Proposition 10 ([3, Theorem 4.4]) *Si la condition (9) est satisfaite, pour toute condition initiale $(y(0), \theta(0), r(0))$, avec $r(0) \geq 0$, tout paramètres $\lambda \in [0, 1)$, $\alpha \geq 1$ et $\beta > 0$ et toute suite bornée d, la suite (y, θ, r) correspondante, solution du système en boucle fermée (4)-(8), est bornée.*

Le démonstration originelle donnée par Egardt est longue et complexe. Elle donne cependant une description assez précise du comportement. Nous donnons ici la preuve plus simple que nous avons proposée et qui est à la base de notre contribution.

Preuve de la Proposition 10 :
Étape 1 : Propriété de la suite $\theta - a$ (Voir [3, Lemma 4.2]). Posons :

$$\widetilde{\theta}(k) \;=\; \theta(k) \;-\; a \quad , \qquad e(k) \;=\; y(k) - a_m y(k-1) \;=\; d(k) - \widetilde{\theta}(k-1)\, y(k-1) \ .$$

De (4) et (8), nous déduisons, avec (9), d'une part

$$\widetilde{\theta}(k)^2 \;\leq\; \max\{a_{max} - a, a - a_{\min}\}^2 \;=\; A$$

et d'autre part :

$$\widetilde{\theta}(k)^2 \;\leq\; \widetilde{\theta}(k-1)^2 \;-\; \frac{3\alpha - 2}{2\alpha}\frac{e(k)^2}{r(k)} \;+\; 2\frac{d(k)^2}{r(k)} \ . \tag{11}$$

Il s'en suit en particulier que, en notant D la norme ℓ^∞ de la suite d, nous avons, pour tout k,

$$\frac{e(k)^2}{r(k)} \;\leq\; B \;=\; \alpha\frac{2A + \frac{4D^2}{\beta}}{3\alpha - 2} \ . \tag{12}$$

Aussi, nous obtenons, pour tout $\ell \leq k$,

$$\frac{1}{k-\ell+1}\sum_{i=\ell}^{k}\frac{e(i)^2}{r(i)} \;\leq\; \frac{2\alpha A}{3\alpha - 2}\,\frac{1}{k-\ell+1} \;+\; \frac{4\alpha}{3\alpha-2}\,\frac{1}{k-\ell+1}\sum_{i=\ell}^{k}\frac{d(i)^2}{r(i)} \ . \tag{13}$$

Étape 2 : Solutions bornées. Collectons les définition de e et de r. Ceci donne après une majoration :

$$\left\{\begin{array}{rcl} r(k) & = & \lambda\, r(k-1) \;+\; \alpha\, y(k-1)^2 \;+\; \beta \ , \\ y(k)^2 & \leq & \dfrac{1+a_m^2}{1-a_m^2}\,\dfrac{e(k)^2}{r(k)}\, r(k) \;+\; \dfrac{1+a_m^2}{2}\, y(k-1)^2 \ . \end{array}\right.$$

ou encore :

$$\left\{\begin{array}{rcl} r(k) & = & \lambda\, r(k-1) \;+\; \alpha\, y(k-1)^2 \;+\; \beta \ , \\ y(k)^2 & \leq & \dfrac{\lambda(1+a_m^2)}{1-a_m^2}\,\dfrac{e(k)^2}{r(k)} r(k-1) \;+\; \left(\dfrac{1+a_m^2}{2} + \dfrac{2\alpha a_m^2}{1-a_m^2}\,\dfrac{e(k)^2}{r(k)}\right)\, y(k-1)^2 \\ & & \qquad\qquad + \; \dfrac{(1+a_m^2)}{1-a_m^2}\,\dfrac{e(k)^2}{r(k)}\,\beta \ . \end{array}\right.$$

Posons alors :

$$s(k) \;=\; \lambda\, r(k) \;+\; \kappa\, y(k)^2 \ ,$$

où κ est un nombre strictement positif que nous préciserons plus tard. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} s(k) \;\leq\; & \lambda\left[\lambda\, r(k-1) \;+\; \alpha y(k-1)^2 \;+\; \beta\right] \\ & + \kappa\left[\frac{\lambda(1+a_m^2)}{1-a_m^2}\,\frac{e(k)^2}{r(k)} r(k-1) \;+\; \left(\frac{1+a_m^2}{2} + \frac{\alpha(1+a_m^2)}{1-a_m^2}\,\frac{e(k)^2}{r(k)}\right)\, y(k-1)^2 \right. \\ & \qquad\qquad \left. + \; \frac{(1+a_m^2)}{1-a_m^2}\,\frac{e(k)^2}{r(k)}\,\beta\right] \ , \\ \leq \quad & \left[\lambda + \frac{\kappa(1+a_m^2)}{1-a_m^2}\,\frac{e(k)^2}{r(k)}\right] \lambda\, r(k-1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left[\frac{\lambda\alpha}{\kappa} + \frac{1+a_m^2}{2} + \frac{\alpha(1+a_m^2)}{1-a_m^2}\,\frac{e(k)^2}{r(k)}\right] \kappa y(k-1)^2 \\
&+ \left[\lambda + \frac{\kappa(1+a_m^2)}{1-a_m^2}\,\frac{e(k)^2}{r(k)}\right] \beta
\end{aligned}
$$

et donc

$$
s(k) \;\leq\; \left[\mu + \delta\frac{e(k)^2}{r(k)}\right] s(k-1) + C\,\beta \ , \tag{14}
$$

où nous avons posé :

$$
\mu \;=\; \max\left\{\lambda, \frac{\lambda\alpha}{\kappa} + \frac{1+a_m^2}{2}\right\} \ , \quad \delta \;=\; \frac{1+a_m^2}{1-a_m^2}\max\left\{\kappa,\alpha\right\} \ , \quad C \;=\; \lambda + \frac{\kappa(1+a_m^2)}{1-a_m^2}\,B \ .
$$

Puisque λ et a_m sont strictement plus petits que 1, nous pouvons toujours choisir κ pour que μ soit aussi strictement plus petit que 1. Par exemple, nous pouvons prendre :

$$
\kappa \;=\; \max\left\{1, \frac{4\alpha\lambda}{1-a_m^2}\right\} \ .
$$

En effet ceci donne :

$$
\frac{\lambda\alpha}{\kappa} + \frac{1+a_m^2}{2} \;\leq\; \frac{1-a_m^2}{4} + \frac{1+a_m^2}{2} \;=\; \frac{3+a_m^2}{4} \;<\; 1 \ .
$$

Notons alors qu'avec (12) ceci implique, pour tout k,

$$
s(k) \;\leq\; M\,s(k-1) \;+\; C\,\beta \tag{15}
$$

avec :

$$
M \;=\; [\mu + \delta B] \ .
$$

Pour démontrer que les solutions (θ, y, r) sont bornées, sachant déjà que la composante θ l'est, il nous suffit d'établir que la suite s est bornée. En particulier, lorsque λ est nul, ceci montrera que y est bornée et donc aussi r. Montrons donc que la suite s ne peut rester strictement plus grande que :

$$
S \;=\; \max\left\{ s(0), \frac{8\alpha\delta D^2}{(3\alpha-2)(1+\mu)\log\left(\frac{3+\mu}{2(1+\mu)}\right)}\frac{1}{\min\left\{1,\frac{\alpha}{\kappa}\right\}}, \frac{2C\beta}{1-\mu}\right\}
$$

que sur un intervalle de longueur maximale K, le plus petit entier satisfaisant :

$$
K \;\geq\; \frac{\left(\frac{4A\delta}{1+\mu}\right) + \log\left(M + \frac{1-\mu}{2}\right)}{\log\left(\frac{4}{3+\mu}\right)} \;-\; 1 \ . \tag{16}
$$

Ceci sera suffisant pour montrer sa bornitude puisque (15) implique alors, pour tout k,

$$
s(k) \;\leq\; M^K\,S \;+\; \frac{M^K-1}{M-1}\,C\,\beta \ .
$$

Supposons donc l'existence d'entiers ℓ et j tels que :

$$s(\ell-1) \;\leq\; S \quad , \qquad s(k) \;>\; S \;\; \forall k \in \{\ell, \ldots, \ell+j\} \; .$$

Puisque nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \lambda\, r(k-1) & = & s(k-1) \;-\; \kappa\, y(k-1)^2 \;, \\ \alpha\, y(k-1)^2 & = & \dfrac{\alpha}{\kappa}\, s(k-1) \;-\; \dfrac{\alpha\lambda}{\kappa}\, r(k-1) \;, \end{array}$$

nous obtenons, pour tout k dans $\{\ell+1, \ldots, \ell+j+1\}$,

$$\begin{array}{rcl} r(k) & \geq & \max\left\{ \left[s(k-1) + (\alpha-\kappa)\, y(k-1)^2\right], \left[\lambda\dfrac{\kappa-\alpha}{\kappa} r(k-1) + \dfrac{\alpha}{\kappa} s(k-1)\right]\right\} \;, \\ & \geq & \min\left\{1, \dfrac{\alpha}{\kappa}\right\} \, S \;, \\ & \geq & \dfrac{8\alpha\delta D^2}{(3\alpha-2)(1+\mu)\log\left(\frac{3+\mu}{2(1+\mu)}\right)} \end{array} \qquad (17)$$

et donc :

$$\frac{d(k)^2}{r(k)} \;\leq\; \frac{(3\alpha-2)(1+\mu)\log\left(\frac{3+\mu}{2(1+\mu)}\right)}{8\alpha\delta} \; .$$

Nous en concluons, avec (13),

$$\frac{1}{j+1}\sum_{i=\ell+1}^{\ell+j+1} \frac{e(i)^2}{r(i)} \;\leq\; \frac{2\alpha A}{3\alpha-2}\frac{1}{j+1} \;+\; \frac{(1+\mu)\log\left(\frac{3+\mu}{2(1+\mu)}\right)}{2\delta} \; . \qquad (18)$$

Nous avons aussi, pour tout k dans $\{\ell+1, \ldots, \ell+j+1\}$,

$$C\,\beta \;\leq\; \frac{1-\mu}{2}\, S \;\leq\; \frac{1-\mu}{2}\, s(k-1) \; .$$

Alors, puisque (14) donne, pour tout k dans $\{\ell+1, \ldots, \ell+j+1\}$,

$$s(k) \;\leq\; \left[\frac{1+\mu}{2} + \delta\frac{e(k)^2}{r(k)}\right] s(k-1)$$

nous avons successivement :

$$\begin{array}{rcl} s(\ell+j+1) & \leq & \displaystyle\prod_{k=\ell+1}^{\ell+j+1} \left[\frac{1+\mu}{2} + \delta\frac{e(k)^2}{r(k)}\right] s(\ell) \;, \\ & \leq & \displaystyle\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{j+1} \exp\left(\sum_{k=\ell+1}^{\ell+j+1} \log\left(1 + \frac{2\delta}{1+\mu}\frac{e(k)^2}{r(k)}\right)\right) \; s(\ell) \;, \\ & \leq & \displaystyle\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{j+1} \exp\left(\sum_{k=\ell+1}^{\ell+j+1} \frac{2\delta}{1+\mu}\frac{e(k)^2}{r(k)}\right) \; s(\ell) \;, \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{j+1} \exp\left(\frac{4A\delta}{1+\mu} + \log\left(\frac{3+\mu}{2(1+\mu)}\right)(j+1)\right) s(\ell)\ , \\
&\leq \left(\frac{3+\mu}{4}\right)^{j+1} \exp\left(\frac{4A\delta}{1+\mu}\right) s(\ell)\ , \\
&\leq \left(\frac{3+\mu}{4}\right)^{j+1} \exp\left(\frac{4A\delta}{1+\mu}\right) \left(M + \frac{1-\mu}{2}\right) S\ ,
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé (15) pour obtenir la dernière inégalité. Nous en déduisons que j doit être inférieur ou égal à K défini en (16) car sinon nous aurions

$$
S \ < \ s(\ell+K+1) \ \leq \ \left(\frac{3+\mu}{4}\right)^{K+1} \exp\left(\frac{4A\delta}{1+\mu}\right) \left(M + \frac{1-\mu}{2}\right) S \ \leq \ S
$$

et qui est une contradiction. Ceci conclut notre preuve.

2 Notre contribution sur la normalisation

Pour prolonger la description de notre contribution, observons que les Les deux propriétés essentielles que nous avons utilisées dans la deuxième étape de notre preuve de la Proposition 10 sont :

- l'inégalité (12) signifiant que le rapport $\frac{e(k)^2}{r(k)}$ est borné. Elle a pour conséquence directe (15) qui signifie que les suites y et r ne peuvent croître plus rapidement qu'une exponentielle,
- l'inégalité (13) qui nous a donné (18). Son interprétation qu'Egardt n'a pas écrite est que, puisque d est bornée, si la suite y ou la suite r reste grande sur un intervalle de temps et que cet intervalle est assez long, alors le rapport $\frac{e(i)^2}{r(i)}$ est petit en moyenne sur cet intervalle.

Ces deux inégalités résultent de l'inégalité clé établie par Egardt dans [3, Lemma 4.2]) (voir (11) ci-dessus) :

$$
\widetilde{\theta}(k)^2 \ \leq \ \widetilde{\theta}(k-1)^2 \ - \ \frac{3\alpha-2}{2\alpha}\frac{e(k)^2}{r(k)} \ + \ 2\frac{d(k)^2}{r(k)}\ .
$$

avec :

$$
\widetilde{\theta}(k)^2 \ \leq \ A\ .
$$

En particulier nous voyons que, si au lieu de supposer que d est une suite bornée, nous supposons que d satisfait :

$$
d(k)^2 \ \leq \ D^2 \ + \ \eta\, r(k) \tag{19}
$$

avec :

$$
\eta \ \leq \ \frac{(3\alpha-2)(1+\mu)\log\left(\frac{3+\mu}{2(1+\mu)}\right)}{16\alpha\delta}
$$

alors l'inégalité (18) reste valide pour peu que nous multiplions par 2 la valeur définissant la constante S. Mais ceci a aussi une conséquence que Egardt n'a pas signalée en terme d'interprétation. En effet, d'une part, pour que l'hypothèse (19) apporte une nouveauté il faut imposer que λ ne soit pas nul. Ce que n'ont pas fait Egardt ou Samson [4, 6]. De plus la présence de r dans la mise à jour de θ n'est plus justifiée par le contexte stochastique et ici, pour notre exemple simplifié, par l'utilisation du filtre de Kalman. Sa justification est de *normaliser* les signaux de sorte que l'effet de la perturbation introduite par d, sur la mise à jour de θ, soit borné. Ceci modifie complètement le point de vue. Ainsi en particulier il est plus approprié de voir l'introduction de r en reprenant le contrôleur nominal (1); en y ajoutant un mécanisme garantissant la bornitude de θ, e.g. une projection, et en y remplacer dans la mise à jour de θ tous les signaux par leur version normalisée, i.e. :

$$\begin{aligned}\theta(k) &= \mathtt{sat}\left(\theta(k-1) + \frac{\frac{y(k-1)}{\sqrt{r(k)}}\left[\frac{y(k)}{\sqrt{r(k)}} - a_m\frac{y(k-1)}{\sqrt{r(k)}}\right]}{\gamma + \frac{y(k-1)^2}{r(k)}}\right) ,\\ &= \mathtt{sat}\left(\theta(k-1) + \frac{y(k-1)\,[y(k) - a_m y(k-1)]}{\gamma r(k) + y(k-1)^2}\right) .\end{aligned}$$

Cette approche permet même un changement de la définition de r. Toujours en étudiant de très près la deuxième étape de notre preuve de la Proposition 10, nous voyons que la seule propriété que nous avons utilisée sur la suite r est qu'elle vérifie :

$$r(k) \leq \lambda_1 r(k-1) + \alpha_1 y(k-1)^2 + \beta \tag{20}$$

avec $\lambda_1 \in (0,1)$, $\alpha_1 \geq 1$, $\beta > 0$, inégalité utilisée pour obtenir (14), et

$$r(k) \geq \lambda_2 r(k-1) + \alpha_2 y(k-1)^2 \tag{21}$$

avec $\lambda_2 \in (0,1)$, $\alpha_2 \geq 1$, inégalité utilisée pour obtenir (17). En particulier, ceci permet de modifier la définition de r en :

$$r(k) = \lambda r(k-1) + (u(k-1)^2 + y(k-1)^2) + 1 \tag{22}$$

En effet, puisque :

$$\begin{aligned}|u(k-1)| &= |a_m - \theta(k-1))|\,|y(k-1)| \leq \left(|a_m - a| + |\widetilde{\theta}(k)|\right)|y(k-1)| ,\\ &\leq \left(|a_m - a| + \sqrt{A}\right)|y(k-1)| ,\end{aligned}$$

nous avons bien (20) et (21) avec :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad , \qquad \alpha_1 = 1 + (|a_m - a| + \sqrt{A})^2 \quad , \qquad \alpha_2 = 1 .$$

Ce changement de point de vue pour r, passant de l'inverse de la trace de la matrice de covariance a posteriori de $\widetilde{\theta}(k)$ à celui de normalisation de la perturbation est essentiel pour permettre de faire un saut qualitatif quant à la classe des systèmes pour lequel le contrôleur adaptatif

$$\begin{aligned}\theta(k) &= \mathtt{sat}\left(\theta(k-1) + \tfrac{y(k-1)\,[y(k) - a_m y(k-1)]}{r(k)}\right)\\ u(k) &= (a_m - \theta(k))\,y(k)\end{aligned}$$

donne des solutions bornées. Par exemple nous pouvons maintenant répondre à la question suivante :
Que se passe t'il si le système à réguler ne vérifie que:

$$y(k) + \sum_i a_i(k)\,y(k-i) = \sum_j b_j(k)\,u(k-j) + d(k)$$

où par rapport au système nominal (2), nous pouvons avoir :

– des instationnarités avec a_i et b_j dépendant du temps,
– des dynamiques négligées avec la présence de plusieurs a_i et b_j,
– des non linéarités avec d pouvant dépendre de u et y mais satisfaisant (19) avec la suite r donnée par (22).

En effet, pour cela dans la preuve de la Proposition 10, il suffit de remplacer d par w_a défini par :

$$w_a(k) \;=\; y(k) \;-\; a\,y(k-1) \;-\; u(k-1)$$

où a est une constante arbitraire dans $[a_{\min}, a_{\max}]$. Puisque nous avons :

$$w_a(k) = \begin{pmatrix} (a - a_1(k)) & -\frac{a_2(k)}{\lambda} & \cdots & (b_1(k)-1) & \frac{b_2(k)}{\lambda} & \frac{b_3(k)}{\lambda^2} & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(k-1) \\ \sqrt{\lambda}\,y(k-2) \\ \sqrt{\lambda^2}\,y(k-3) \\ \vdots \\ u(k-1) \\ \sqrt{\lambda}\,u(k-2) \\ \sqrt{\lambda^2}\,u(k-3) \\ \vdots \end{pmatrix} + d(k)\ ,$$

les inégalités de Young et Schwarz donnent, pour tout k,

$$w_a(k)^2 \;\leq\; 2\left(\eta + [a_1(k)-p]^2 + [b_1(k)-1]^2 + \sum_{i>1} \frac{a_i(k)^2 + b_i(k)^2}{\lambda^{i-1}}\right) r(k) + 2D^2$$

Nous aurons donc des solutions bornées si nous pouvons trouver a dans $[a_{\min}, a_{\max}]$ tel que nous ayons par exemple, pour tout k,

$$\left(\eta + [a_1(k)-p]^2 + [b_1(k)-1]^2 + \sum_{i>1} \frac{a_i(k)^2 + b_i(k)^2}{\lambda^{i-1}}\right) \;\leq\; \frac{(3\alpha-2)(1+\mu)\log\left(\frac{3+\mu}{2(1+\mu)}\right)}{32\alpha\delta}$$

où μ et δ se déduisent de a et des paramètres λ, a_m, a_{min} et $a_{\max}$ du contrôleur par :

$$\mu = \max\left\{\lambda, \frac{\lambda\alpha}{\kappa} + \frac{1+a_m^2}{2}\right\}\ ,\ \delta = \frac{1+a_m^2}{1-a_m^2}\max\{\kappa, \alpha\}\ .$$

avec :

$$\alpha \;=\; 1 \;+\; (|a_m - a| \;+\; \max\{a_{max} - a, a - a_{\min}\})^2 \quad , \qquad \kappa \;>\; \frac{2\lambda\alpha}{1-a_m^2}\ .$$

En fait au lieu d'avoir ceci pour tout k, il suffit de l'avoir en moyenne. (Voir [5]).

References

[1] G.C. Goodwin, P.J. Ramadge and P.E. Caines, Discrete time multivariable adaptive control, IEEE Trans. on Auto. Control, Vol.AC-25, No.3, June 1980, pp.449-456.

[2] G.C. Goodwin, P.J. Ramadge and P.E. Caines, Discrete time stochastic adaptive control, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol.19, No.6, November 1981, pp.829-853.

[3] B. Egardt, Stability of adaptive controllers. Springer Verlag. 1979

[4] B. Egardt, C. Samson Stable adaptive control of non-minimum phase systems Systems & Control Letters, Volume 2, Issue 3, October 1982, Pages 137-144

[5] L. Praly, Commande adaptative indirecte multivariable: stabilité et robustesse. Colloque national du CNRS. Belle-Ile. Septembre 1982.

[6] C. Samson Stability analysis of adaptively controlled systems subject to bounded disturbances Automatica, Volume 19, Issue 1, January 1983, Pages 81-86