

# Optimisation multi-objectifs à base de méta-modèle pour les problèmes de mise en forme

Mohsen Ejday, Lionel Fourment

► **To cite this version:**

Mohsen Ejday, Lionel Fourment. Optimisation multi-objectifs à base de méta-modèle pour les problèmes de mise en forme. 9ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2009, Giens, France. 6 p. - ISBN 978-2-11-098374-9 - [http://giens2009.lmt.ens-cachan.fr/resumes/r\\_4T5287Z2.pdf](http://giens2009.lmt.ens-cachan.fr/resumes/r_4T5287Z2.pdf). hal-00509302

**HAL Id: hal-00509302**

**<https://hal-mines-paristech.archives-ouvertes.fr/hal-00509302>**

Submitted on 11 Aug 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Optimisation multi-objectifs à base de méta-modèle pour les problèmes de mise en forme

M. Ejday, L. Fourment

Mines ParisTech, CEMEF - Centre de Mise en Forme des Matériaux,  
CNRS UMR 7635,  
BP 207, 1 rue Claude Daunesse, 06904 Sophia Antipolis Cedex, France  
{mohsen.ejday,lionel.fourment}@mines-paristech.fr

---

**Résumé** – Pour appliquer des méthodes d’optimisation multi-objectifs à des problèmes de mise en forme des matériaux très coûteux en temps de calcul, nous étudions le couplage de l’algorithme NSGA-II proposé par K. Deb avec des méta-modèles inspirés de la méthode des Différences Finies sans Maillages de Liszka et Orkisz. Nous observons l’importance d’améliorer itérativement le méta-modèle au cours des itérations d’optimisation, et la possibilité de déterminer avec précision les fronts de Pareto du problème en moins d’une centaine de calculs.

**Mots clés** – Optimisation Multi-Objectifs, Différences Finis sans Maillage, NSGA-II.

---

## 1 Introduction

Pour des Problèmes d’Optimisation Multi-Objectifs (POMO), il est d’usage de ne pas rechercher une seule solution optimale, mais un ensemble de solutions optimales correspondant à différents arbitrages entre les différentes fonctions optimisées. La représentation graphique de cet ensemble est nommé le front de Pareto [1]. Les Algorithmes Evolutionnaires Multi-Objectifs (AEMO) apparaissent comme les techniques les plus générales et les plus efficaces pour la détermination de cet ensemble avec une bonne diversité de points, même pour des problèmes particulièrement difficiles [1]. Cependant, ils nécessitent un nombre important d’évaluations des fonctions coût, ce qui rend ces stratégies inutilisables pour des problèmes gourmands en temps de calcul, comme par exemple en mise en forme des matériaux, le cadre de notre étude.

Ce nombre important d’évaluation des fonctions peut être considérablement réduit en remplaçant une grande partie de ces évaluations par des approximations construites à partir d’un méta-modèle. Dans ce travail, nous nous proposons d’utiliser un méta-modèle inspiré des méthodes sans maillage, en nous limitant à un nombre maximum d’évaluations de la fonction coût, que nous fixons ici arbitrairement à 100. Le couplage de l’AEMO au Méta-modèle (AEMO-M) peut s’effectuer de plusieurs manières, dont l’étude constitue le corps de ce papier. L’ AEMO-M est ensuite évalué sur plusieurs fonctions analytiques tests, avant d’être appliqué à des exemples plus proches d’un POMO en forgeage 3D.

## 2 Problème d’Optimisation Multi-Objectifs (POMO)

Un Problème d’Optimisation Multi-Objectifs (POMO) (voir équ. (1)) est constitué de  $M$  fonctions coût  $\phi_m(X)$  à minimiser ou maximiser par rapport à  $X$ , un vecteur de  $n$  variables de contrôle :  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  ( $n$  est donc le nombre des paramètres). Il doit souvent satisfaire un certain nombre de contraintes. Les solutions vérifiant ces contraintes constitue l’espace de recherche (ou de décision)  $S$ . Il peut donc s’écrire sous la forme générale :

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimiser/Maximiser} & \phi_m(X) \quad m = 1, \dots, M \\
& g_j(X) \geq 0 \quad j = 1, \dots, J \\
\text{satisfaisant} & h_k(X) = 0 \quad k = 1, \dots, K \\
& x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i = 1, \dots, n
\end{array} \tag{1}$$

Pour déterminer l'ensemble des solutions optimales parmi toutes les solutions de l'espace de décision, on utilise le concept de dominance [1-4] : une solution  $X^1$  est dite dominer une solution  $X^2$ , si les deux conditions suivantes sont vraies :

1. La solution  $X^1$  n'est pas pire que la solution  $X^2$  pour toutes les  $M$  fonctions coût,
2. La solution  $X^1$  est strictement meilleure que  $X^2$  pour au moins une fonction coût.

L'ensemble des solutions non-dominées de  $S$  est l'ensemble des solutions optimales, il est connu sous le nom d'*ensemble de Pareto* et sa représentation graphique est nommée *front optimal de Pareto*. Dans un POMO, on cherche donc à atteindre deux objectifs : Trouver un ensemble de solutions qui converge vers le front de Pareto et Que cet ensemble soit suffisamment riche ou bien distribuer pour représenter au mieux le front de Pareto.

### 3 Algorithme génétique élitiste de tri non-dominé (NSGA-II)

L'algorithme génétique NSGA-II (Elitist Non-dominated Sorting Genetic Algorithm) proposé par Deb [1,2] et également décrit dans [3,4], apparaît comme l'un des algorithmes les plus efficaces pour trouver l'ensemble optimal de Pareto avec une excellente variété des solutions. Il est basé sur les trois caractéristiques suivantes : il utilise le principe de l'élitisme, il favorise les solutions non-dominées, et il utilise une variété explicite des solutions.

Le NSGA-II commence par une génération aléatoire d'une population initiale  $P_0$  de  $N$  individus parents. A la génération  $t$ , une population  $Q_t$  de  $N$  enfants est créée à partir de la population parent  $P_t$  en utilisant les opérateurs génétiques (sélection – croisement - mutation). Ensuite, les deux populations sont combinées pour former une nouvelle population  $R_t$  de taille  $2N$ . La recherche des solutions non-dominées permet de classer les individus de  $R_t$  en plusieurs fronts de rangs différents. Elle est effectuée de la manière suivante. Chaque individu de  $R_t$  est comparée à tous les autres individus par le concept de dominance. Les individus non-dominés appartiennent au front de rang 1, le front de Pareto. En éliminant, temporairement, ces individus de l'ensemble de recherche, l'algorithme est itéré pour fournir le front de rang 2, et ainsi de suite. La nouvelle population parent  $P_{t+1}$  est alors construite avec les  $N$  individus appartenant aux fronts de rang les plus faibles. Pour le dernier front, il y a plus de solutions que de places restantes dans la nouvelle population  $P_{t+1}$ . Les individus sont alors triés selon leur distance d'encombrement [1], et par ordre croissant. Ce choix permet d'offrir la meilleure distribution des individus sur le front de rang le plus élevé.

Le principal inconvénient des algorithmes évolutionnaires est leur coût de calcul important en nombre d'évaluation des fonctions, généralement de l'ordre de plusieurs milliers. Pour surmonter cet obstacle, un modèle approché ou méta-modèle est proposé.

### 4 Méta-modèle

Le méta-modèle utilisé est basé sur la méthode de différences finies sans maillage de Liszka et Orkisz [5,6]. Il utilise une interpolation locale d'ordre 1 ou 2, construite à partir d'un développement en série. Considérons un point  $i$  du domaine paramétrique, où nous souhaitons calculer une approximation  $\tilde{\phi}_i$  de  $\phi_i = \phi(X_i)$ , à partir de la connaissance de la valeur de  $\phi_j$  aux  $\lambda$  points maîtres  $j$  du domaine. Ecrivons un développement limité à l'ordre 1 de  $\phi_i$  en  $j$  :

$$\forall j=1,\lambda, \phi_j = \phi_i + \nabla\phi_i(X_j - X_i) + O(\|X_j - X_i\|^2) \quad (2)$$

$\phi_i$  et  $\nabla\phi_i$  étant inconnues, on recherche des valeurs approchées  $\tilde{\phi}_i$  et  $\nabla\tilde{\phi}_i$  qui minimisent l'erreur moyenne quadratique  $E(\phi_i, \nabla\phi_i)$  (3) de l'ensemble de ces développements limités (2). Cette minimisation conduit à résoudre un système linéaire (4) de  $(n+1)$  équations à  $(n+1)$  inconnues, facile à résoudre.

$$E(\phi_i, \nabla\phi_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1,\lambda} \frac{(\phi_i + \nabla\phi_i(X_j - X_i) - \phi_j)^2}{\|X_j - X_i\|^4} \quad (3)$$

$$A \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \nabla\tilde{\phi}_i \end{pmatrix} = b \left( (\phi_j)_{j=1,\lambda} \right) \quad (4)$$

S'agissant de développement limités à l'ordre 1, une estimation de l'erreur d'extrapolation de  $\phi_i$  par  $\tilde{\phi}_i$  au point  $i$  peut être donnée par :

$$\Delta\tilde{\phi}_i = \left( \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1,\lambda} \frac{1}{\|X_j - X_i\|^2} \right)^{-1} \quad (5)$$

## 5 Couplage de NSGA-II au méta-modèle (NSGA-II-M)

Dans cette section, on étudie trois manières d'introduire ce méta-modèle dans le NSGA-II ; elles diffèrent par le choix des points maîtres, et par l'évolution du méta-modèle.

### 5.1 NSGA-II-M constant : NSGA-II-M<sub>0</sub>

Pour NSGA-II-M<sub>0</sub>, les  $N$  (=100) individus de la population parent initiale  $P_0$  générés aléatoirement par NSGA-II sont utilisés comme  $\lambda$  points maîtres ( $\lambda = N = 100$ ) pour construire le méta-modèle constant  $M_0$ , ce que signifie que tous les individus de la population  $P_0$  sont évalués exactement. A chaque génération suivante  $t$ , les valeurs des fonctions des  $N$  individus de la population enfant  $Q_t$  sont alors approximés en utilisant  $M_0$ .

### 5.2 NSGA-II-M actualisé : NSGA-II-M<sub>1</sub>

Pour NSGA-II-M<sub>1</sub>, le méta-modèle initial  $M_0$  est construit à partir des  $\lambda$ ,  $\lambda \leq \lambda_{max}$  ( $\lambda_{max} = 100$ ), premiers individus de la population initiale  $P_0$ , dont les valeurs des fonctions coût sont donc évaluées exactement. Le méta-modèle  $M_0$  est alors utilisé pour approcher les valeurs des autres individus de cette population. On fixe un nombre  $N_u$  de générations, au cours desquelles on enrichit le méta-modèle en ajoutant les  $\theta$  premiers individus de la population enfant (équation (6)). Ces  $N_u$  générations sont réparties avec une fréquence  $\psi$  sur les  $N_g$  générations de l'algorithme génétique. A la nouvelle génération  $t$  correspondant à la fréquence  $\psi$ , le méta-modèle  $M_t$  est enrichi en  $M_{t+1}$  qui est alors utilisé pour estimer les valeurs des fonctions pour tous les individus de la population  $Q_t$ , ainsi que ceux de la population  $P_t$ .

$$\theta = \frac{\lambda_{max} - \lambda}{N_u} \quad (6)$$

### 5.3 NSGA-II-M évolutif : NSGA-II- M<sub>e</sub>

Le méta-modèle évolutif NSGA-II-M<sub>e</sub> diffère de NSGA-II-M<sub>1</sub> par la sélection des  $\theta$  nouveaux points maîtres. Au lieu d'un choix aléatoire, on retient les  $\theta$  meilleurs individus au sens de l'approximation  $(\tilde{\phi} - \Delta\tilde{\phi})$ , qui représente une estimation de la meilleure solution possible pour un individu donné. Le tri des individus suivant  $(\tilde{\phi} - \Delta\tilde{\phi})$  repose sur le calcul des différents fronts à partir du critère de dominance et sur celui de la distance d'encombrement.

## 6 Problèmes analytiques

Dans cette partie, nous comparons les résultats obtenus avec les approches NSGA-II, NSGA-II-M<sub>0</sub> et NSGA-II-M<sub>1</sub> sur différentes fonctions analytiques tests des POMO [1]. L'algorithme utilise une population de taille  $N = 100$ , le nombre de générations est  $N_g = 50$ , et avec les méta-modèles, le nombre total d'évaluations des fonctions coût est  $\lambda_{max} = 100$ .

Pour le POMO Min-Ex (voir équ. (7)), les paramètres de NSGA-II-M<sub>1</sub> sont les suivants :  $N_u = 40$ ,  $\theta = 2$ ,  $\lambda = 20$  et  $\psi = 1$ . La Figure 1 présente les fronts de Pareto obtenus avec ces trois algorithmes.

$$\text{MIN}_{\substack{(x_1, x_2) \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 5}} \left\{ f_1(x_1, x_2) = x_1 ; f_2(x_1, x_2) = \frac{1+x_2}{x_1} \right\} \quad (7)$$

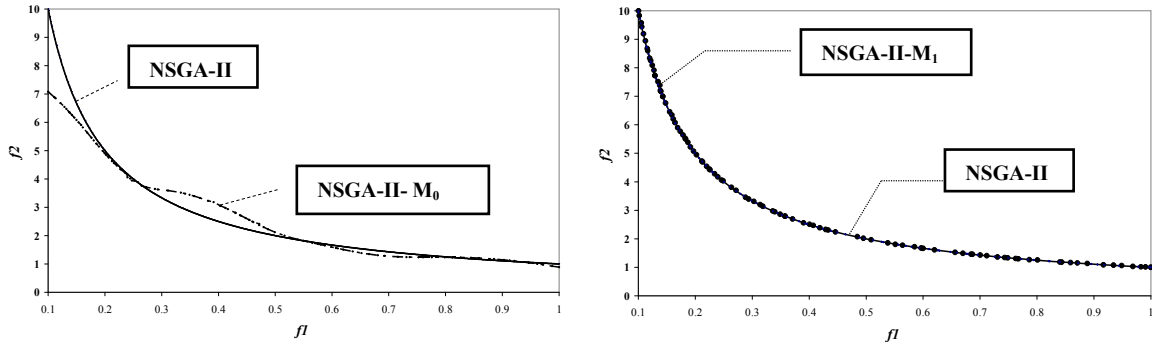


Figure 1 – Comparaison entre les fronts de Pareto obtenus pour le POMO Min-Ex avec NSGA-II-M<sub>0</sub>, NSGA-II-M<sub>1</sub> et NSGA-II

Pour le POMO SCH2 (voir équ. (8)), proposé par Schaffer [1], les paramètres retenus pour NSGA-II-M<sub>1</sub> un peu différents, de manière à bien trouver les deux branches du front de Pareto discontinu :  $N_u = 45$ ,  $\theta = 2$ ,  $\lambda = 10$  et  $\psi = 1$ . La Figure 2 montre les résultats obtenus avec les trois algorithmes.

$$\text{MIN}_x \left\{ f_1(x) ; f_2(x) = (x-5)^2 \right\} ; f_1(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \\ x-2 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 4-x & \text{si } 3 < x \leq 4 \\ x-4 & \text{si } 4 < x \leq 10 \end{cases} \quad (8)$$

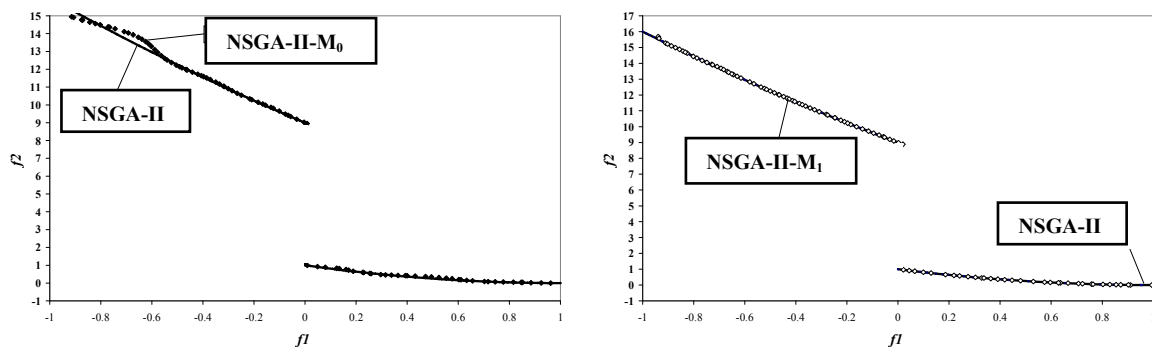


Figure 2 – Comparaison entre les fronts de Pareto obtenus pour le POMO SCH2 avec NSGA-II-M<sub>0</sub>, NSGA-II-M<sub>1</sub> et NSGA-II

Sur ces deux exemples, caractéristiques des résultats obtenus avec un plus large spectre de fonctions tests, nous observons que le méta-modèle constant de NSGA-II-M<sub>0</sub> permet d’obtenir, en seulement 100 calculs exacts, une bonne approximation des fronts de Pareto calculés très précisément par ailleurs en 5 000 calculs avec NSGA-II. La Figure 1 et la Figure 2 montrent que localement ce front n’est pas parfaitement déterminé. Le recours au méta-modèle évolutif de NSGA-II-M<sub>1</sub> permet d’améliorer la précision et d’obtenir des résultats excellents.

## 7 Problème de mise en forme

Une première application de NSGA-II-M<sub>0</sub> en mise en forme des matériaux est réalisée sur un problème d’optimisation de forme d’un lopin pour le forgeage d’une bielle. Ce lopin cylindrique est défini par son diamètre,  $d$  et sa hauteur, qui est considérée constante. Le POMO (9) consiste à minimiser le volume de matière du lopin ainsi que l’écart entre la pièce désirée et celle forgée. Ce dernier est évalué par le non remplissage des gravures de forgeage et la distance pièce/outil en dehors des zones de bavure (voir Figure 3). NSGA-II-M<sub>0</sub> est utilisé avec  $\lambda_{max} = 19$  calculs exacts. La Figure 4 montre que le méta-modèle constant fournit une assez bonne estimation des fonctions coûts, qui sont relativement simples dans cet exemple, et que l’on peut ainsi calculer le front de Pareto pour ce problème, et ainsi observer plus finement comment le volume de matière est relié au défaut de remplissage des gravures (Figure 4 – droite) pour estimer, par exemple les intervalles de sécurité à considérer pour garantir la robustesse de l’opération de forgeage.

$$\text{MIN}_{0.8 \leq x \leq 1.05} \{f_1(x) = \text{volume} ; f_2(x) = \text{non-remplissage}\} \quad (9)$$

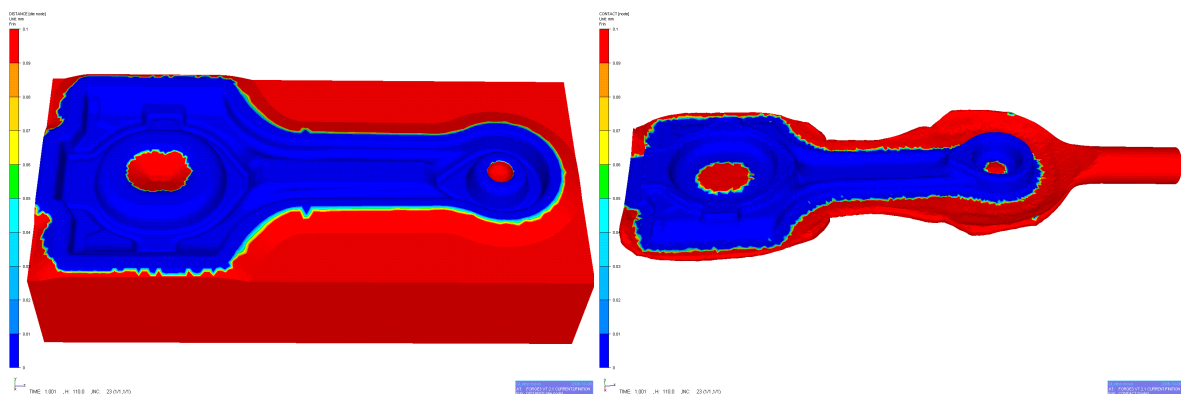


Figure 3 – Forgeage d’une bielle avec Forge3® : iso valeurs de contact sur la pièce et sur l’outil.

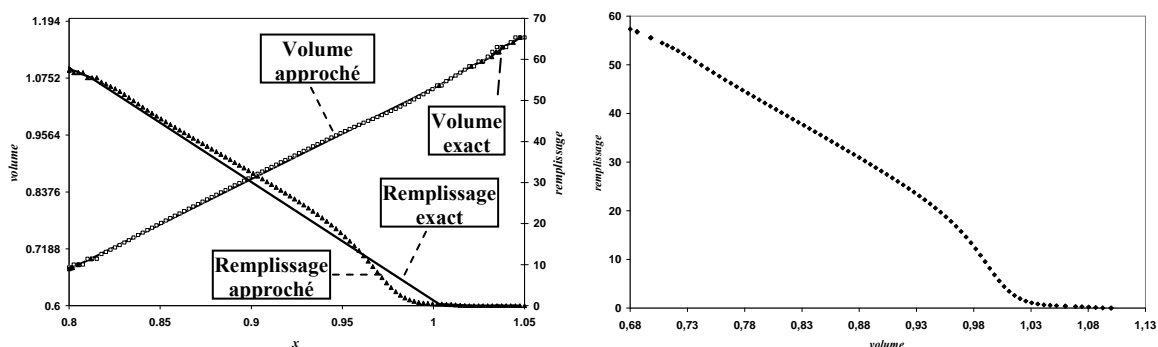


Figure 4 – Comparaison entre les fonctions coût obtenues par le méta-modèle constant et celles calculées exactement (à gauche) ; front de Pareto du problème (à droite)

## 8 Conclusion

Alors que dans [6] nous avons conclu que le couplage d'algorithmes génétiques à un méta-modèle permettait de résoudre des problèmes d'optimisation fortement non convexes contenant de nombreux extrema, à un coût de calcul limité et contrôlé, nous constatons dans ce travail qu'il est possible d'étendre cette approche à une problématique multi-objectifs, qui nécessite cette fois la recherche d'un ensemble de solutions optimales, le front de Pareto, pour un coût en nombre de calculs exacts à peine supérieur et limité à une centaine. Sur les fonctions analytiques étudiées, continue et discontinue, nous observons qu'il est très important de mettre à jour le méta-modèle aux cours des itérations d'optimisation, ce qui permet d'affiner la précision de ce dernier autour du front de Pareto. Une première application à un problème de forgeage montre la faisabilité de l'approche en mise en forme, qui devra être confirmée par des applications plus complexes.

## Références

- [1] K. Deb. *Multi-Objective Optimisation using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons Chichester, 2001.
- [2] K. Pawan, S.Nain, K. Deb. A Multi-Objective Optimization Procedure with Successive Approximate Models. KanGAL Report Number 2005002.
- [3] M. Emmerich, B. Naujoks. Metamodel-Assisted Multiobjective Optimization with Implicit Constraints and its Application in Airfoil Design. *In International Conference & Advanced Course ERCOFTAC*, Athens, Greece, 2004.
- [4] T. Goal, R. Vaidyanathan, R. T. Haftka, W. Shyy, N. V. Queipo, K. Tucker. Response surface approximation of Pareto optimal front in multi-objective optimization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 196, 879-893, 2007.
- [5] T. Liszka, J. Orkisz. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Comp.and Struct* 11, 83-95, 1980.
- [6] M. T. T. Do. *Optimisation de forme en forgeage 3D*. Thèse de Mines ParisTech, 2006.