

Intégration numérique d'une loi élasto-plastique endommageable dans une formulation mixte et adaptation de maillage

Rachid El Khaoulani, Pierre-Olivier Bouchard

► **To cite this version:**

Rachid El Khaoulani, Pierre-Olivier Bouchard. Intégration numérique d'une loi élasto-plastique endommageable dans une formulation mixte et adaptation de maillage. CFM'09 - XIXème Congrès Français de mécanique, Aug 2009, Marseille, France. 6 p. hal-00509329

HAL Id: hal-00509329

<https://hal-mines-paristech.archives-ouvertes.fr/hal-00509329>

Submitted on 9 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Intégration numérique d'une loi élasto-plastique endommageable dans une formulation mixte et adaptation de maillage

R. ELKHAOULANI^a, P.O. BOUCHARD^a

^a Mines ParisTech, Cemef, Rue Claude Daunesse BP 207, 06904 Sophia Antipolis

Résumé :

Notre étude propose un outil de simulation numérique pour prédire l'endommagement ductile et l'amorçage de la rupture dans une structure soumise à des grandes déformations plastiques. Un modèle de Lemaitre enrichi en formulation mixte a été implémenté, et la méthode non locale du gradient implicite a été utilisée pour s'affranchir de la dépendance à la discrétisation spatiale. Une stratégie d'adaptation de maillage anisotrope pilotée par un estimateur de l'erreur d'interpolation a été utilisée afin d'améliorer la précision pour l'endommagement avec un temps de calcul minimal. Les simulations numériques ont montré la fiabilité et la précision de notre approche à prévoir l'évolution de l'endommagement et l'amorçage de fissure.

Abstract :

This study focuses on structural computation to predict the ductile damage evolution and failure. The enhanced Lemaitre ductile damage model in mixed velocity-pressure formulation has been implemented. A nonlocal damage model, based on an implicit gradient formulation is used. This nonlocal approach enables to avoid the well-known localisation phenomenon and ensure mesh objectivity results [1, 2, 3]. A mesh adaptation strategy driven by a directional error estimator based on local interpolation error and involving a hessian of the solution is considered here. Numerical experiments has proved the proposed approach gives reliable and physical results.

Mots clefs : Endommagement, adaptation de maillage, formulation mixte

1 Equations du modèle

1.1 Loi de comportement élastoplastique endommageable

Dans cette étude, on s'intéresse à l'endommagement plastique ductile, qui accompagne les grandes déformations plastiques des métaux à froid. L'endommagement est considéré isotrope, et est défini par une variable scalaire w reliant le tenseur des contraintes de *Cauchy* et le tenseur des contraintes effectives par la relation [4] :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-w} \quad (1)$$

On se limite au modèle de comportement élastoplastique avec un critère de plasticité associée de *von Mises* et un écrouissage isotrope. En utilisant la décomposition en partie sphérique et déviatorique des tenseurs, les équations de la loi constitutive élastoplastique endommageable s'écrivent :

- la décomposition en partie élastique et en partie plastique du déviateur de déformations : $\dot{e} = \dot{e}^e + \dot{e}^{pl}$
 - Comportement élastique couplé avec l'endommagement : $\dot{s} = 2\mu(1-w)\dot{e}^e - \frac{\dot{w}}{1-w}s$
 - Le critère de *von Mises* : $f(s, r, w) = \frac{1}{1-w} \sqrt{\frac{3}{2}} s : s - \sigma_0(r)$
 - Equations d'évolution de la déformation plastique :
- $$\dot{e}^{pl} = \frac{3\lambda^{pl}}{2(1-w)^2\sigma_0(r)} s \quad , \quad r = (1-w)\bar{\epsilon} \quad , \quad \lambda^{pl} = (1-w)\dot{\bar{\epsilon}}$$
- Conditions de chargement : $f \leq 0 \quad \lambda^{pl} \geq 0 \quad , \quad f\lambda^{pl} = 0$

où $\sigma_0(r)$ représente une loi d'écrouissage isotrope du matériau, et λ^{pl} est le multiplicateur plastique.

L'évolution de l'endommagement est gouvernée par le modèle de *Lemaitre* :

$$\dot{w} = \frac{\lambda^{pl}}{1-w} \left(\frac{-Y}{S_0} \right)^b \delta_{\{\bar{\varepsilon} \geq \bar{\varepsilon}_d\}} \quad 0 \leq w < w_c \text{ or } w = 1 \quad (2)$$

où b et S_b sont des constantes matériaux, ε_d est la valeur de déformation équivalente à partir de laquelle l'endommagement commence à apparaître, w_c est la valeur de l'endommagement à partir de laquelle la fissure apparaît, Y est la variable thermodynamique associée à l'endommagement, ou encore le taux de restitution d'énergie élastique :

$$Y = \frac{-1}{2E(1-w)^2} ((1+\nu)\sigma : \sigma - \nu(tr\sigma)^2) \quad (3)$$

où ν est le coefficient de Poisson.

La distinction de l'évolution de l'endommagement en traction par rapport à celle en compression a été pris en compte par la décomposition additive du tenseur des contraintes en partie de traction pure et en partie de compression pure $\sigma = \sigma_+ + \sigma_-$. L'expression de Y devient :

$$Y = -\frac{-1}{2E(1-w)^2} [(1+\nu)\sigma_+ : \sigma_+ - \nu < tr\sigma >^2] - \frac{h}{2E(1-hw)^2} [(1+\nu)\sigma_- : \sigma_- - \nu < -tr\sigma >^2] \quad (4)$$

où h est un paramètre qui caractérise l'effet de fermeture des fissures, avec $0 \leq h \leq 1$. Une valeur typique de ce paramètre est $h = 0.2$ pour les métaux [5]. On note que dans le cas de traction pure on retrouve l'expression précédente de Y , et dans le cas de compression pure la valeur absolue de Y obtenue par (4) est plus petite que celle obtenue par (3), cela veut dire que l'évolution de l'endommagement est moins importante dans un état de compression par rapport à un état de traction. On note aussi que la valeur limite de $h = 1$ permet de retrouver le modèle initial et $h = 0$ traduit la fermeture totale des fissures et l'arrêt de l'évolution de l'endommagement dans le cas de la compression.

1.1.1 Intégration locale de la loi de comportement

La méthode du prédicteur élastique avec retour radial a été utilisée pour l'intégration de la loi de comportement. Une discrétisation numérique en temps par un schéma d'Euler implicite conduit au système d'équations suivant, avec comme inconnues le taux de déformation plastique $\dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}$ et l'endommagement w_{n+1} :

$$\begin{cases} (1-w_{n+1} + \Delta t \dot{w}_{n+1}) \sigma_0(r_{n+1}) + 3\mu(1-w_{n+1}) \Delta t \dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1} - B_0 = 0 \\ w_{n+1} - w_n - \Delta t \dot{w}_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

avec $B_0^2 = \frac{3}{2} s_{n+1}^T : s_{n+1}^T$ où $s_{n+1}^T = s_n + 2\mu(1-w_{n+1}) \Delta t \dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}$ est le prédicteur élastique.

la variable d'écroutissage : $r_{n+1} = (1-w_{n+1}) \bar{\varepsilon}_{n+1}$ et le multiplicateur plastique : $\lambda_{n+1} = (1-w_{n+1}) \dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}$
Ce système non linéaire est résolu par un algorithme de *Newton Raphson*. Ensuite, le déviateur des contraintes est donné par :

$$s_{n+1} = (1-w_{n+1}) \frac{\sigma_0(r_{n+1})}{B_0} (s_n + 2\mu(1-w_{n+1}) \Delta t \dot{\bar{\varepsilon}}_{n+1}) \quad (6)$$

1.2 Formulation vitesse-pression

On s'intéresse aux problèmes élastoplastique avec des grandes déformations plastiques. Étant donné que les déformations plastique sont incompressibles et beaucoup plus importantes que les déformations élastique, on est amené à résoudre des problèmes quasi incompressibles d'où l'utilisation d'une formulation vitesse pression dans notre étude. Les équations de conservations de la masse et de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} div(s) - \nabla p = 0 \\ div(v) + \frac{1}{\chi(1-w)} \dot{p} - \frac{\dot{w}}{\chi(1-w)^2} p = 0 \end{cases} \quad (7)$$

où $\chi = \frac{E((d-2)\nu+1)}{d(1-2\nu)(1+\nu)}$, avec l'hypothèse de déformations planes si $d = 2$.

Une approximation éléments finis mixtes vitesse-pression avec une discrétisation stabilisée $P1^+/P1$ a été utilisée pour approcher ce système d'équations. Il s'agit d'une approximation linéaire pour la vitesse et pour la pression avec un enrichissement de l'interpolation de la vitesse par une fonction bulle linéaire au centre de chaque élément fini. Les fonctions de base associées aux noeuds internes ont un support qui se limite à un élément, les degrés correspondants ne sont liés à aucun autre autre degré de liberté que ceux de l'élément considéré. Cela permet d'éliminer par condensation les degrés de liberté de la bulle et se ramener ainsi à la résolution du problème discret ayant les mêmes degrés de liberté sans les fonctions bulles.

1.3 Endommagement non local

L'approximation éléments finis pour le modèle d'endommagement local présente une forte dépendance des résultats par rapport à la discrétisation spatiale [6]. Plusieurs modèles d'endommagement non local ont été développés pour pallier à ce phénomène. Dans notre étude, nous avons retenu le modèle d'endommagement non locaux du gradient implicite [1]. Ce modèle introduit une variable d'endommagement non locale \bar{w} solution du système :

$$\begin{cases} -c(l_c)\Delta\bar{w} + \bar{w} = w & \text{in } \Omega \\ \nabla\bar{w} \cdot \vec{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

avec $c(l_c) = l_c^2$ où l_c est la longueur caractéristique qui détermine la taille de la zone d'influence qui intervient dans le calcul de la variable non locale.

2 Estimateur d'erreur

Nous avons adapté au calcul de structure avec endommagement la technique d'estimation d'erreur géométrique introduite par Alauzet [7]. Cette technique considère que le contrôle de l'erreur d'interpolation permet un contrôle de l'erreur d'approximation pour la variable considérée. L'estimation de l'erreur d'interpolation est donc utilisée pour définir une carte discrète de métrique anisotrope dans le but d'équi-répartir l'erreur dans chaque direction.

Cette métrique sert comme paramètre au mailleur *MTC*[8], développé au *Cemef*, pour générer un maillage plus adapté au phénomène étudié. Il s'agit d'une méthode de génération de maillage par optimisation topologique. Cette méthode itérative consiste à apporter des améliorations progressives à un maillage existant jusqu'à avoir un maillage de la qualité requise.

On considère une variable u approchée par des éléments simples linéaires simpliciaux en 2D ou 3D. Pour tout élément K du maillage, la majoration de l'erreur d'interpolation peut s'écrire [7] :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty, K} \leq c \max_{x \in K} \max_{e \in E_K} \langle e, |H_u(x)|e \rangle \quad (9)$$

où c est une constante qui dépend de la dimension du problème, E_K l'ensemble des arêtes de l'élément K du maillage, et $|H_u(x)| = \mathcal{R}\Lambda\mathcal{R}^{-1}$ est la valeur absolue de la hessienne de la variable u , où \mathcal{R} est la matrice des vecteurs propres et $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_i|)$ la matrice diagonale des valeurs absolues des valeurs propres.

On suppose l'existence d'un tenseur de métrique $\overline{\mathcal{M}}(K)$ vérifiant :

$$\max_{e \in E_K} \langle e, |H_u(x)|e \rangle \leq \langle e, \overline{\mathcal{M}}(K)e \rangle, \text{ pour tout } e \in E_K \quad (10)$$

on obtient alors la majoration suivante :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty, K} \leq c \max_{e \in E_K} \langle e, \overline{\mathcal{M}}(K)e \rangle \quad (11)$$

ensuite, l'erreur d'interpolation ε_K commise sur l'élément K est estimée par :

$$\varepsilon_K = c \max_{e \in E_K} \langle e, \overline{\mathcal{M}}(K)e \rangle \quad (12)$$

Cette relation signifie que l'erreur d'interpolation commise sur un élément K est proportionnelle au carré de la plus grande longueur des arêtes de K , dans la métrique $\overline{\mathcal{M}}(K)$. le contrôle des longueurs des arêtes des éléments du maillage permet donc de contrôler l'erreur d'interpolation sur le maillage et donc l'erreur d'approximation.

soient ϵ le seuil de l'erreur d'interpolation tolérée, h_{min} (resp. h_{max}) la longueur minimale (resp. maximale) autorisée pour les arêtes du maillage d'après les équations précédentes, en chaque sommet du maillage on définit un tenseur de métrique de la manière suivante :

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}\tilde{\Lambda}\mathcal{R}^{-1}, \quad \tilde{\Lambda} = \text{diag}(|\tilde{\lambda}_i|) \text{ et } \tilde{\lambda}_i = \min \left(\max \left(\frac{c|\lambda_i|}{\epsilon}, \frac{1}{h_{max}^2} \right), \frac{1}{h_{min}^2} \right) \quad (13)$$

Cette métrique de nature anisotrope vérifie les équations 10, 11 et 12. Elle permet la génération d'un maillage pour lequel l'erreur d'interpolation est majorée par ϵ si on est pas contraint par la taille minimale h_{min} . Cette limite de taille a été introduite afin d'éviter que trop d'éléments ne soient générés dans les régions proches des singularités.

3 Validation

Dans cette section, on présente des exemples de simulation numérique afin de :

- S'assurer que notre approche éléments finis pour le calcul de structure avec endommagement permet d'éviter la dépendance à la discrétisation spatiale.
- Montrer la fiabilité de notre modèle à prévoir correctement les zones sensées s'endommager et l'amorçage de fissure lors de la sollicitation d'une structure.
- Comparer l'évolution du maillage et de l'endommagement au cours d'une simulation numérique afin d'illustrer que le maillage s'adapte bien au phénomène d'endommagement.

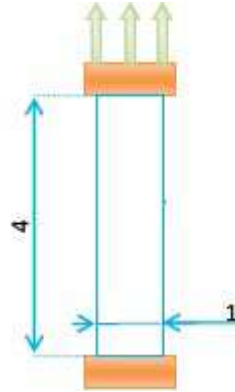


FIG. 1 – Géométrie(mm) et conditions aux limites

On considère un cas de traction simple d'une plaque plane (figure 1) et le modèle d'endommagement non local et une taille caractéristique $l_c = 0.06\text{mm}$. On impose à la plaque un déplacement vertical de $u = 0.88\text{mm}$ dans un intervalle de temps $[0, 0.88\text{s}]$ avec un pas de temps uniforme $\Delta t = 0.005\text{s}$. La plaque est constituée d'un alliage d'aluminium avec $E = 70000\text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $\bar{\varepsilon}_d = 0$, $w_c = 0.98$, $b = 1$, $S_0 = 1.25\text{MPa}$ et $\sigma_0(r) = 596(10^{-4} + r)^{0.31}\text{MPa}$. On considère quatre maillages triangulaires uniformes : $h_1 = 0.01\text{mm}$ (100454 éléments), $h_2 = 0.02\text{mm}$ (24806 éléments), $h_3 = 0.03\text{mm}$ (11137 éléments), $h_4 = 0.04\text{mm}$ (6139 éléments).

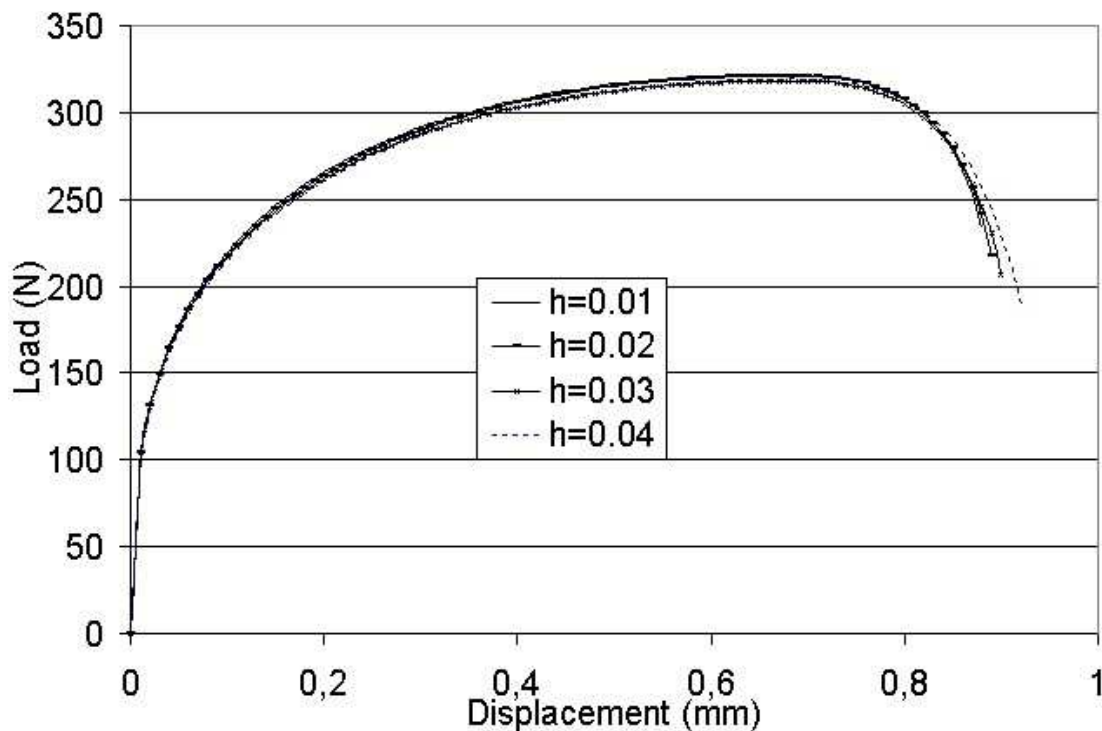


FIG. 2 – La courbe force déplacement pour 4 tailles de maille et le modèle d'endommagement non local

Pour les quatre tailles de maille, la courbe force-déplacement (figure 2) présente un comportement élastoplastique qui n'est pas influencé pas l'endommagement au début de l'essai. Ensuite, on voit un adoucissement du comportement du matériau et vers la fin de l'essai on a une chute de la courbe qui traduit la création des macro-défauts et l'amorçage de la rupture de la structure. De plus, avec la décroissance de la taille de maille les courbes se rapprochent de celle obtenue avec le maillage le plus fin, nous avons donc une convergence en maillage.

Les figures 3 et 4 représentent respectivement la carte des isovaleurs pour l'endommagement et la déformation généralisée pour les 4 maillages précédents. Dans chacun de cas on voit apparaître des répartitions physiques de ces champs : L'endommagement est localisé au centre de l'éprouvette et les déformations illustrent la formation des bandes de cisaillement. De plus, la largeur de ces bandes n'est pas influencée par la taille du maillage. Pour montrer que le maillage s'adapte au phénomène d'endommagement, on commence la simula-

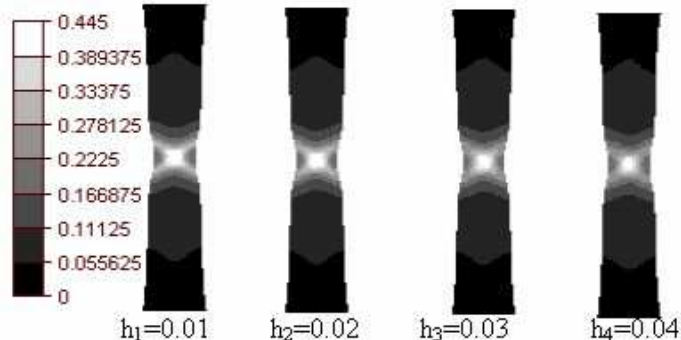


FIG. 3 – La carte des isovaleurs de l'endommagement pour un déplacement vertical $u = 0.88 \text{ mm}$

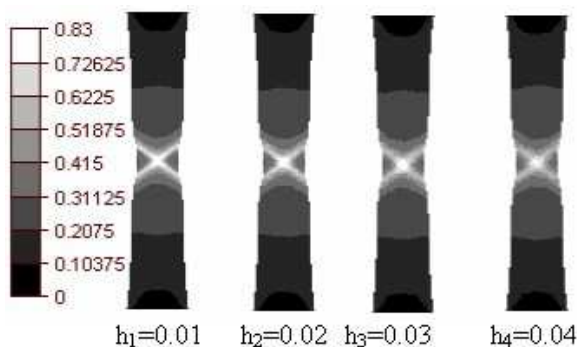


FIG. 4 – La carte des isovaleurs de la déformation généralisée pour un déplacement vertical $u = 0.88 \text{ mm}$

tion par un maillage uniforme et on suit l'évolution l'endommagement et du maillage au cours de la simulation figure 5. Avec la croissance de l'endommagement, on voit que le maillage est raffiné dans les zones fortement endommagées et déraffiné ailleurs, et vers la fin de la simulation le fait que le maillage s'adapte bien à l'endommagement est bien illustré par la formation des bandes de cisaillement par le maillage.

Enfin on remarque l'apparition de la fissure au centre de l'éprouvette à 45 degrés par rapport à l'axe de chargement ce qui correspond bien aux résultats expérimentaux pour un matériau homogène.

4 Conclusion

Un modèle d'endommagement de Lemaitre enrichi a été implémenté dans une formulation mixte vitesse-pressure, la méthode du gradient implicite a permis notre approche éléments finis de s'affranchir de la discrétisation spatiale. Enfin, une stratégie d'adaptation de maillage au phénomène d'endommagement a été adaptée afin d'augmenter la précision pour l'endommagement avec temps de calcul minimal.

L'essai de traction simple a prouvé la fiabilité et la précision de notre approche à prévoir les zones sensés s'endommager et l'amorçage de fissure lors de la sollicitation d'une structure.

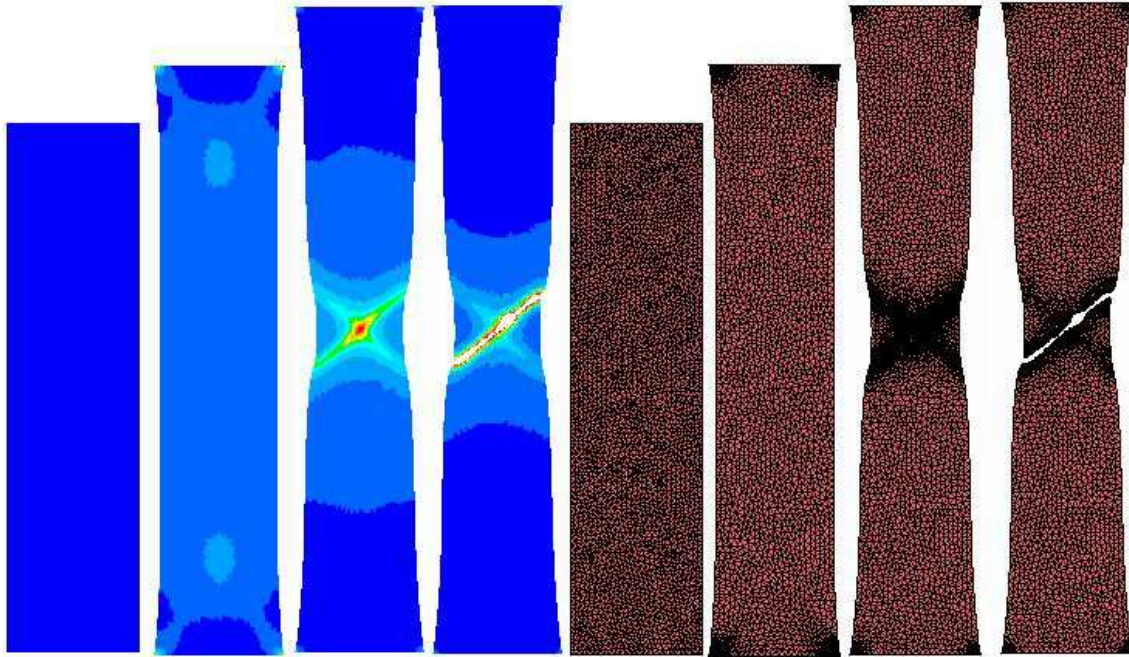


FIG. 5 – évolution de l’endommagement et du maillage au cours d’un essai de traction simple.

Références

- [1] Engelen R., Geers M., and Baaijens F. Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour. *Int. J. Plast.*, 19, 403–433, 2003.
- [2] de Borst R. and Sluys L. Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 90, 805–827, 1991.
- [3] Suffis A., Lubrecht T., and Combescure A. Damage model with delay effect analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length. *Int. J. Solids Struct.*, 40, 3463–3476, 2003.
- [4] Lemaitre J. and Desmorat R. *Engineering damage mechanics*. Springer, 2005.
- [5] Lemaitre J. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 2001.
- [6] Pijaudier-Cabot G., Bazant Z., and Tabbara M. Comparison of various models for strain softening. *Engng. Comp.*, 5, 141–150, 1988.
- [7] Alauzet F., Frey P., and George P. Anisotropic mesh adaptation for reyleigh-taylor instabilities. *European Congress on Computational methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*, Finland, June, 2004.
- [8] Coupez T. Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 9(4), 403–423, 2000.