

## Approche visco hyperélastique basée sur une théorie de réseau

Noëlle BILLON

Mines-ParisTech, CEMEF, UMR 7635, BP 207 06904 Sophia Antipolis

Noelle.billon@mines-paristech.fr

---

### RESUME:

Une modification de la théorie de réseau d'Edwards et Vilgis permet de modéliser le comportement visco hyperélastique des polymères au dessus de  $T_g$ . L'introduction des effets anélastiques ne se fait pas, comme à l'habitude par la combinaison de modèles élémentaires (amortisseurs ou ressorts). Elle découle de l'évolution de paramètres représentant soit le dé enchevêtrement soit le durcissement du réseau composé de noeuds permanents et d'enchevêtrement. Il s'agit d'une approche que l'on peut qualifier de mésoscopique conservant un sens physique sans pour autant être une approche micromécanique.

D'un point de vue global, les effets de vitesses, de température et de durcissement sont représentés de manière encourageante avec un nombre réduit de paramètres.

Ecrite dans un cadre thermodynamique rigoureux cette approche offre un cadre de prise en compte des phénomènes physiques couplés à la déformation.

Ce modèle offre un cadre nouveau pour la modélisation du comportement des polymères ayant l'avantage d'un respect strict des principes de la thermodynamique et d'un faible nombre de paramètres tous identifiables.

**MOTS-CLES :** Visco hyper élasticité, Polymères, Elastomères, Modèle thermodynamique.

---

## Introduction

Dans leur état caoutchoutique les polymères, et singulièrement les polymères amorphes, présentent un comportement complexe combinant hyper élasticité et effets anélastiques qui sont d'origines visqueuse ou irréversible. Ils présentent aussi une forte sensibilité couplée au taux de déformation et à la température. Ces aspects peuvent être clairement illustrés avec un PMMA au-dessus de sa transition vitreuse mais représente un canevas général pour ce type de polymères.

Sur la figure 1 et 2 sont donc représenté les courbes de comportement (contrainte vraie – déformation de cumulée) pour un PMMA. Ces courbes sont identifiées à partir d'essais de traction uniaxiale, à vitesse de déformation contrôlées et avec mesure locale de déformation. C'est ce type de comportement, et sa dépendance en vitesse et température, que nous souhaitons

## Hypothèse de base

Dans ce modèle nous admettons que le comportement de base du polymère est hyper élastique. Nous choisissons donc un modèle de réseau pour le représenter.

Les effets anélastiques sont supposés provenir d'une évolution du matériau (dé enchevêtrement par exemple) qui résulte en une modification du réseau ou, plus exactement, des paramètres caractéristiques de celui-ci.

Pour conserver l'énergie nous admettons que cette évolution des paramètres est compensée par une relaxation des déformations du réseau. Ce phénomène de transfert d'énergie (relaxation de la déformation vers la variation des paramètres) serait la source de l'anélasticité. Nous pouvons, aussi, ajouter à cet effet une dissipation thermique, qui traduit qu'une partie de l'énergie mécanique fournie provoquera un échauffement.

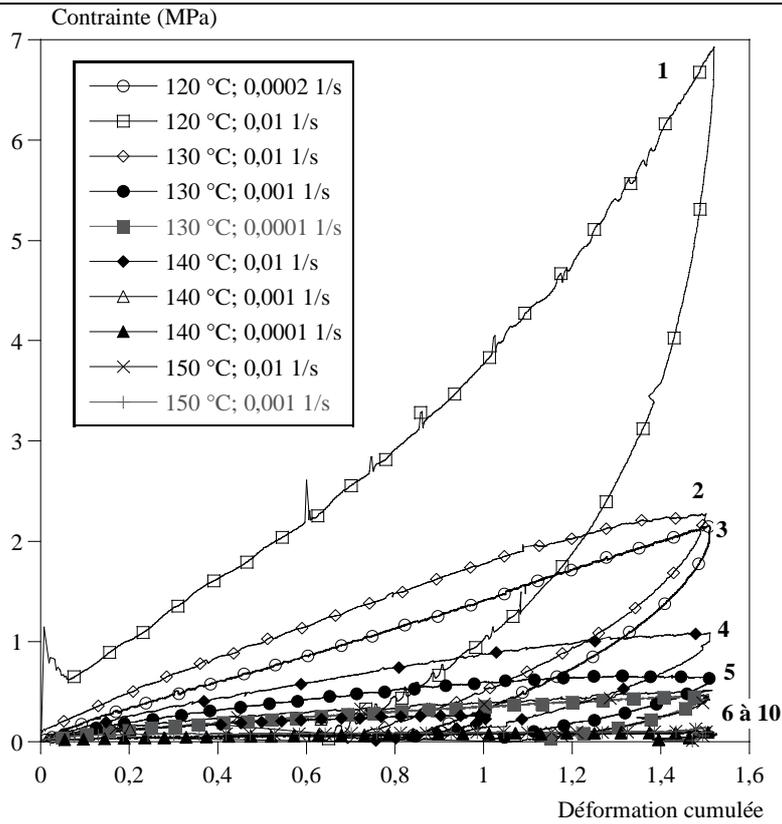


Fig. 1 : Comportement d'un PMMA en traction pour différents couples vitesse - température.

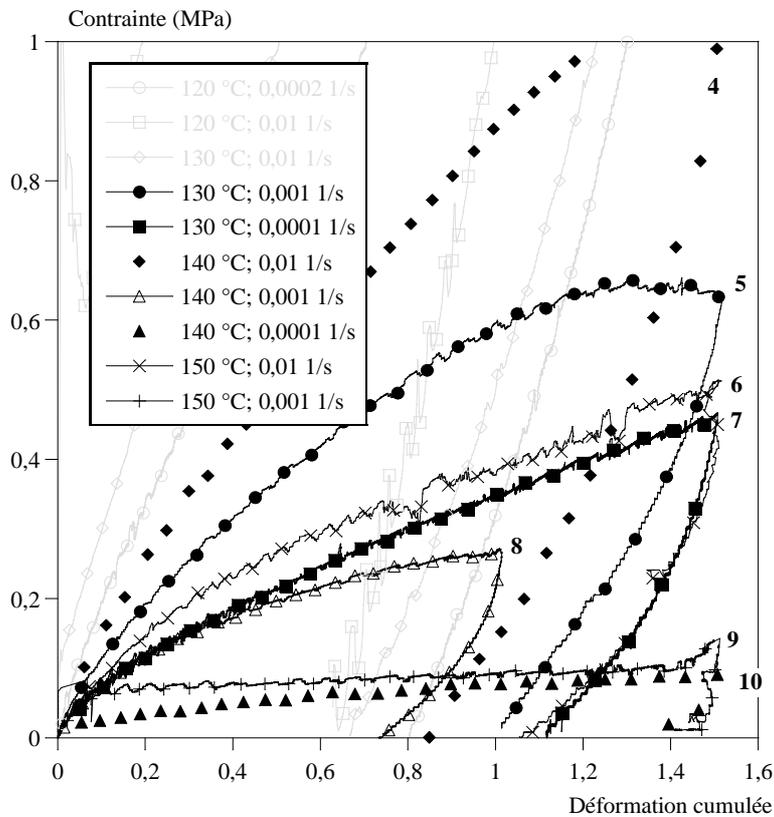


Fig. 2 : Comportement d'un PMMA en traction pour différents couples vitesse - température (zoom de la figure 1).

Donc, si F est l'énergie du réseau (énergie libre d'Helmolzt par exemple),  $\lambda$  les extensions principales décrivant la sollicitation (décomposée en  $\lambda^e$  la part élastique et la  $\lambda^a$  part anélastique),  $\eta$  le paramètre (les paramètres éventuellement) évoluant du fait des dé enchevêtrements et  $W_t$  la puissance dissipée en chaleur, nous trouvons qu'à tout temps t :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} \dot{\eta} - \sum_{i=1,3} \frac{\partial F}{\partial \lambda_i^e} \dot{\lambda}_i^a + W_t = 0 \quad (1)$$

Nous introduisons ainsi le flux du paramètre  $\eta$ , résultant des processus anélastiques.

La contrainte, pour sa part, dérive classiquement du potentiel F. Par exemple pour une traction uniaxiale :

$$\sigma = \lambda^e \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda^e} \right)_T - P \quad (2)$$

où P est une pression arbitraire résultant de l'incompressibilité.

Pour exprimer F, notre choix se porte sur le modèle d'Edward et Vilgis [1] pour qui le potentiel s'écrit :

$$\frac{F}{kT} = \frac{1}{2} N_s \left\{ \sum_{i=1,3} \left[ \frac{\lambda_i^{e2} (1+\eta)(1-\alpha^2)}{(1+\eta\lambda_i^{e2}) \left(1-\alpha^2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{e2}\right)} + \ln(1+\eta\lambda_i^{e2}) \right] + \ln \left( 1 - \alpha^2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{e2} \right) \right\} + \frac{1}{2} N_c \left\{ \sum_{i=1,3} \left[ \frac{\lambda_i^{e2} (1-\alpha^2)}{\left(1-\alpha^2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{e2}\right)} + \ln \left( 1 - \alpha^2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{e2} \right) \right] \right\} \quad (3)$$

où k est la constante de Boltzmann et T la température absolue. Ce potentiel peut aussi s'exprimer en fonction des seul 3 invariants du tenseur élongation.

Quatre paramètres sont introduits :

- $N_s$  une densité d'enchevêtrements ;
- $N_c$  une densité de points de réticulation ;
- $\alpha$  un paramètre lié à l'extensibilité des chaînes supposée non infinie ;
- $\eta$  un paramètre de glissement relié aux enchevêtrements.

C'est l'influence de ce dernier que nous illustrons ici.  $\eta$  est supposé augmenter au cours du temps avec une cinétique,  $\dot{\eta}$ , dépendant de F dans le sens où plus l'énergie est grande plus vite le paramètre évolue.

Enfin, pour simplifier nous admettrons l'existence du coefficient de Taylor Quinney,  $\beta$ , qui est la proportion de puissance anélastique convertie en chaleur.

Ce modèle est développé dans sa généralité 3D, il est compatible avec les approches thermodynamique des processus irréversibles et reproduit le comportement des polymères.

Sa capacité à reproduire les effets anélastiques (Fig. 3) est illustrée ici dans un cas uni axial par soucis de simplicité. Un seul paramètre supplémentaire (qui contrôle la vitesse de variation de  $\eta$ ) autorise l'introduction de boucle d'hystérésis.

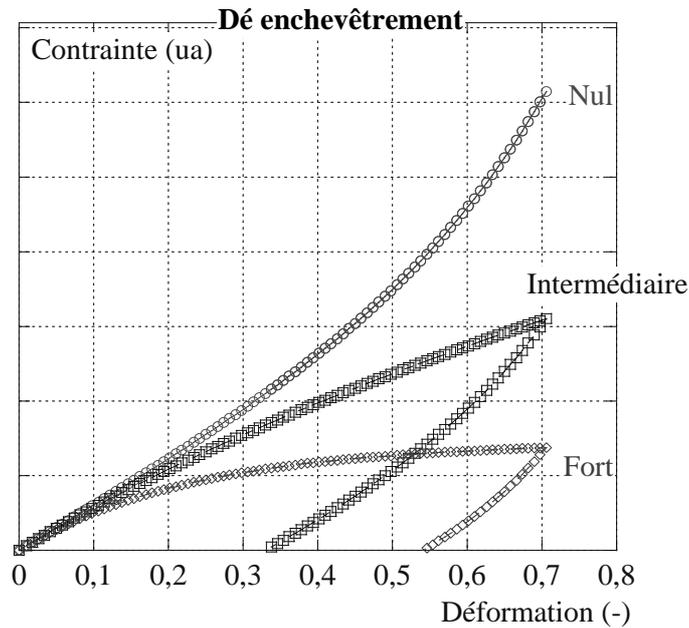


Fig. 3 : Exemple de résultat obtenu en charge décharge avec le modèle. Comparaison entre le modèle hyper élastique de base (de enchevêtrement nul) et deux cas de dé enchevêtrement.

## Application

Appliqué à un PMMA ce modèle donne d'excellents résultats. Ainsi les 5 paramètres de base suffisent à reproduire nos courbes une à une.

Pour tenir compte des effets de vitesses et de température nous proposons de tirer partie de l'équivalence temps température qui permet de regrouper ces deux variables en une seule, la vitesse équivalente à une température de référence. Celle-ci permet de classer les différents comportements expérimentaux des figures 1 et 2 de manière assez correctes (tableau 1). Nous utilisons ici une approche de type WLF dont les facteurs de décalage sont identifiés dans le domaine visco élastique linéaire et une température de référence de 130 °C.

Numéro d'ordre	Température ( °C)	Vitesse (s <sup>-1</sup> )	Vitesse équivalente à 130 °C (s <sup>-1</sup> )
1	120	0.01	0,235
2	130	0.01	0,01
3	120	0.0002	0,0047
4	140	0.01	0,00043
5	130	0.001	0,001
6	150	0.01	1,8 10 <sup>-5</sup>
7	130	0.0001	0,0001
8	140	0.001	7,1 10 <sup>-5</sup>
9	150	0.001	5,04 10 <sup>-6</sup>
10	140	0.0001	7,1 10 <sup>-6</sup>

Tableau 1 : Ensemble des données des courbes 1 et 2 et vitesses équivalentes à la température de référence (ici 130 °C).

Nous admettrons donc que le comportement, et par voie de conséquence nos paramètres, ne dépendent que de cette nouvelle variable, la vitesse équivalente à la température de référence. Cette approche est compatible avec la thermodynamique même si elle reste phénoménologique.

Ce faisant (Fig. 4) il est possible de reproduire le comportement du PMMA de manière satisfaisante.

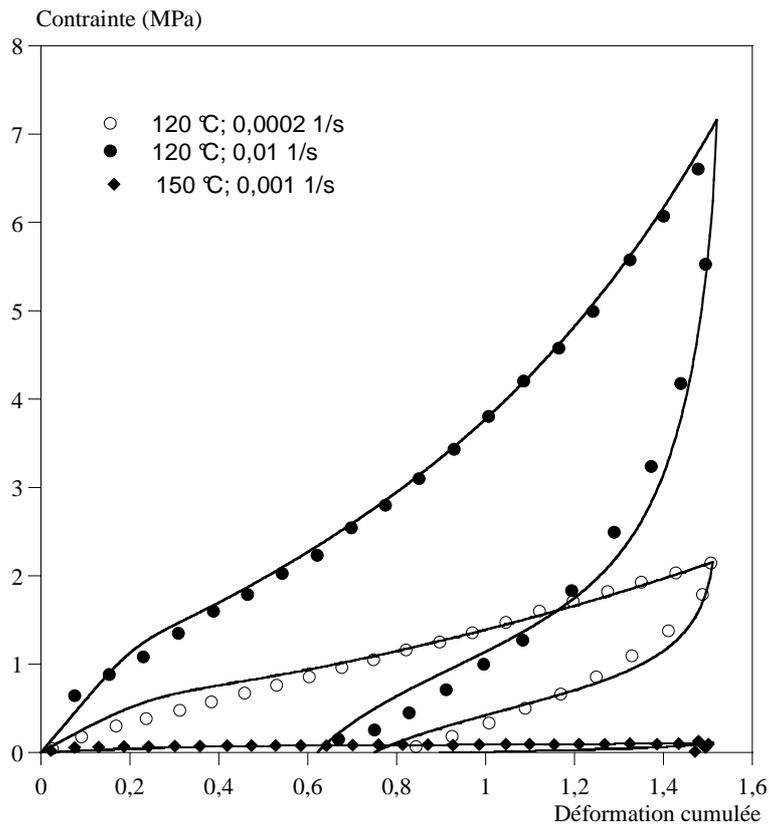


Fig. 4 : Comparaison modèle (trait plein) – expérience (symbole pour 3 conditions des figs. 1 et 2.

**Références:**

Edwards S.F., Vilgis T. *Polymer* 27 (1986) 483