

Méthode multi-échelle pour la modélisation du flambage des tôles minces sous contraintes résiduelles – Application au laminage

Rebecca NAKHOUL^{1*}, Pierre MONTMITONNET², Michel POTIER-FERRY³

¹ CEMEF, MINES ParisTech, UMR CNRS 7635, Sophia Antipolis, France, rebecca.nakhoul@mines-paristech.fr

² CEMEF, MINES ParisTech, UMR CNRS 7635, Sophia Antipolis, France, pierre.montmitonnet@mines-paristech.fr

³ LEM3, Université de Lorraine, UMR CNRS 7554, Metz, France, michel.potier-ferry@univ-lorraine.fr

Résumé — Dans le laminage à froid, l'apparition d'une distribution hétérogène de contraintes résiduelles peut engendrer le flambage de la tôle laminée, entraînant un « défaut de planéité ». L'objectif est de définir un modèle macroscopique simple décrivant les modes et amplitudes de flambage d'une tôle sous l'effet des contraintes résiduelles issues du laminage. Le présent article présente une nouvelle méthode bi-échelle [1,2] comme une alternative du modèle de flambage développé dans [10-13]. Elle utilise un développement en séries de Fourier, pour résoudre les équations de Von Karman (flambage des tôles minces). Couplé avec le modèle de laminage **Lam3/Tec3**, cette technique a le potentiel de détecter la charge critique et le mode de flambage, puis de décrire l'état post-flambé de la tôle (amplitude des défauts, redistribution des contraintes).

Mots clés — Tôle mince, méthode multi-échelle, flambage, post-flambage, amplitude des défauts

1. Introduction

Lors du laminage à froid d'une tôle mince, l'apparition des contraintes résiduelles est inévitable, du fait de la réduction non homogène de la tôle, elle-même due à la déformation élastique des cylindres de travail et de la cage. Ces contraintes sont hétérogènes et peuvent engendrer le flambage de la tôle. Le flambage se produit localement quand les contraintes résiduelles dépassent une compression critique. Il se traduit par différents types de défauts de planéité qui affectent la qualité finale du produit industriel (exemple Fig.1).

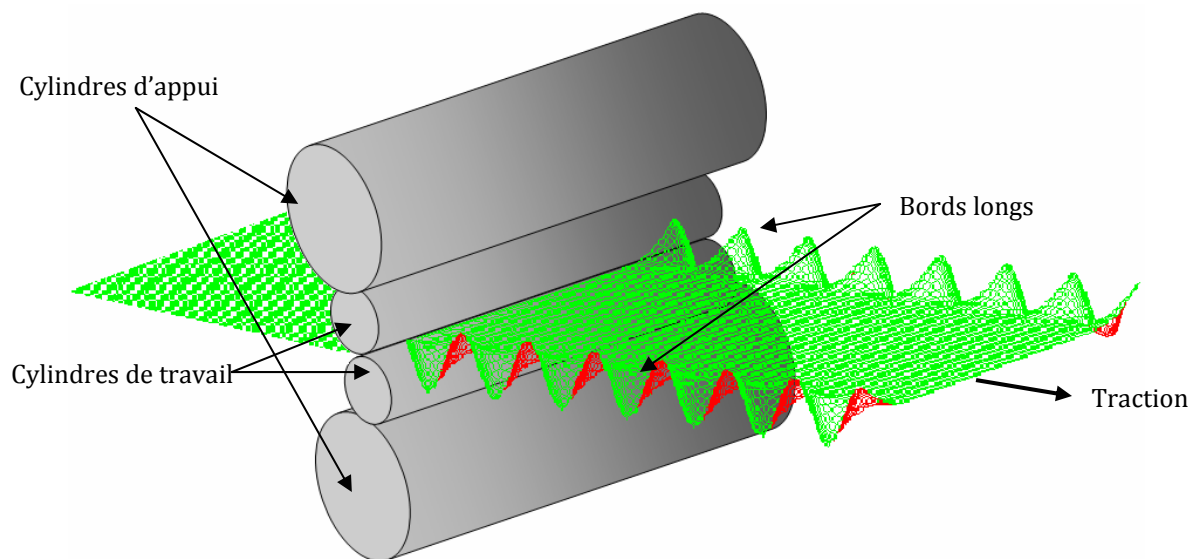


Fig. 1. Présentation schématique d'un défaut de planéité (type bords longs) rencontré durant le laminage à froid.

Pour utiliser au mieux les outils de contrôle implantés sur le laminoir (« actionneurs de planéité »), une modélisation de leur effet est nécessaire. Il faut un modèle capable de prédire à la fois le mode et

le seuil de flambage correspondant, d'anticiper l'état post-flambé de la tôle et de quantifier géométriquement les défauts.

Au-delà de la solution classique du flambement des plaques de Timoshenko, il a fallu développer des méthodes traitant le flambage sous contraintes résiduelles fortement hétérogènes. Dans la littérature des modèles (semi)analytiques, la forme de la tôle en cas de flambement est supposée sinusoïdale dans la direction de laminage. Les déplacements hors plan correspondants sont introduits dans les équations du problème. Bush [14] a une approche par éléments finis dans le sens transverse et résout les équations de Von Karman; pour chaque nombre d'onde q , il trouve une contrainte critique et le minimum correspond à la solution. Fisher et al. [15-16] se donnent aussi une forme polynomiale en sens transverse; tous les paramètres géométriques sont déterminés par minimisation de l'énergie élastique.

Counhaye [13] puis Abdelkhalek et al. [10-12] utilisent une autre approche, fortement couplée à un calcul éléments finis des contraintes de laminage. Au cours du processus itératif de Newton-Raphson du système non linéaire, partout où le champ de contrainte viole une condition de stabilité (reprise de Timoshenko), une correction au champ de déformation est ajoutée, proportionnelle à l'écart à la contrainte critique, et renvoyée dans les itérations. A convergence, ils obtiennent l'état de flambement et les contraintes relaxées, mais pas l'amplitude des défauts.

C'est précisément pour déterminer cette amplitude que nous étudions ici la capacité de la méthode multi-échelle ([1,2]) à répondre à ces besoins. En la couplant avec le modèle éléments finis existant **Lam3/Tec3**, on compte obtenir un modèle plus complet que [10-13]. Non seulement il sera capable de détecter les zones flambées, d'anticiper le mode de flambage et de calculer la déformation supplémentaire équivalente aux effets de relaxations dues au flambement de la tôle, mais il doit aussi calculer et quantifier l'amplitude des défauts de planéité (en *mm*).

Dans cet article, une méthode pour coupler un modèle de flambage simplifié avec le logiciel **Lam3/Tec3** est présentée. Le flambage est décrit par une méthode multi-échelle [1,2] qui permet de prédire d'une part l'enveloppe des oscillations de la tôle dues aux contraintes compressives, d'autre part la diminution de ces contraintes générée par oscillations.

2. Modèle éléments finis **Lam3/Tec3**

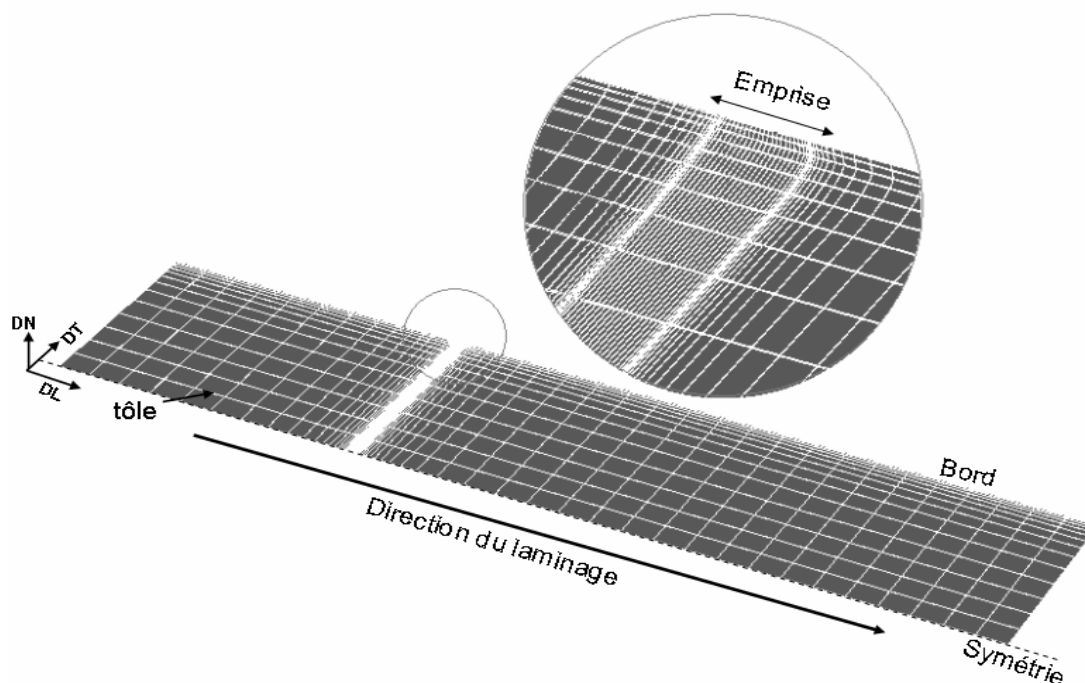


Fig. 2. Le maillage structuré utilisé dans Lam3 : raffiné au niveau de l'emprise et aux bords de la tôle.

La base de l'approche utilisée est un modèle de laminage éléments finis implicite nommé **Lam3/Tec3**. Il couple les modèles de déformation de la tôle (**Lam3**) avec celui de la cage (**Tec3**) comme décrit dans [3,4].

Pour la déformation de la tôle (**Lam3**), la principale caractéristique est une formulation stationnaire basée sur l'intégration suivant les lignes de courant anticipant la forme et la déformation sous et en sortie de l'emprise. Cette formulation est considérée comme une variante de la formulation eulérienne - lagrangienne. Elle élimine l'intégration en temps, mais demande une boucle d'itérations de substitution qui, après chaque calcul de champ de vitesse et de contrainte, actualise la géométrie du domaine a priori inconnu (problème à surface libre par la méthode des lignes de courant, déformation de la cage). Un grand soin est consacré à la détermination du contact (entre la tôle et les cylindres de travail) et aux difficultés rencontrées dans les techniques utilisant les lignes de courants (i.e. la pénétration ou le détachement des surfaces de contact concernées) [5]. La méthode de stabilisation SUPG est utilisée pour le couplage thermomécanique [6] à cause du grand nombre de Péclet (le transfert par convection domine le transfert par conduction). Puisque plusieurs aspects de la formulation utilisée sont basés sur les lignes de courant, l'utilisation d'un maillage structuré est avantageuse. Un tel maillage permet une meilleure représentation de la tôle sous emprise et dans les zones critiques où les défauts de planéité peuvent apparaître (les bords par exemple) Fig.2. Le maillage utilisé est formé d'hexaèdres à 8 nœuds avec une intégration réduite de la pression dans le principe des puissances virtuelles [7]. Quant aux contraintes résiduelles, un modèle élasto-visco-plastique est utilisé.

Le modèle de déformation de la cage (**Tec3**) est une nécessité pour représenter la complexité d'un cas de laminage. Ce modèle de flexion et d'aplatissement des cylindres de travail et d'appui est basé sur la théorie de poutres de Timoshenko, la solution de Boussinesq sous un chargement général et le mécanisme de contact de Hertz [8,9]. Il est discrétisé par la méthode des fonctions d'influence et aboutit à un système d'équations dont la solution combine un déplacement de corps rigide, les déformations des lignes de contact des cylindres et la pression de contact. Ce système non linéaire est résolu par la méthode de Newton-Raphson. Pour plus de détails, on se reportera à [3,4].

Pour des tôles minces (de l'ordre de 0,1 mm), le maillage peut être présenté par un seul élément dans l'épaisseur et en plus il est structuré de façon à avoir les éléments d'une même section alignés. Cette structure sera exploitée pour le couplage avec le modèle de flambage, avec plusieurs simplifications aboutissant à la résolution de problèmes unidimensionnels sur chaque section transverse.

3. Modèle de flambage : principe et équations

La méthode multi-échelle décrite dans [1,2] propose de i) développer les inconnues sous forme de séries de Fourier: $U = \sum_{m=1}^{\infty} U_m e^{imqx}$ où q est le nombre de demi-ondes de flambage et les coefficients de Fourier $U_m = \langle U e^{-imqx} \rangle$ varient lentement sur une période. Un tel choix suppose que les ondulations se produisent uniquement dans le sens du laminage (x) : cette étude est limitée à décrire les défauts longitudinaux (bords longs, centre long), laissant de côté d'autres défauts secondaires, ii) résoudre le système de Von Karman en utilisant le développement choisi et iii) prendre en compte l'effet du flambement sur la distribution des contraintes en modifiant la loi de comportement.

Si u , v et w représentent respectivement le déplacement dans la direction de laminage (DL), la direction transverse (DT) et hors plan (DN), les notations suivantes sont adoptées pour simplifier l'écriture: $\tilde{u} = (u, v)$, $N = \sigma.h$ et $\bar{N}_0 = T_0.h$ où σ est le tenseur de contrainte, T_0 est la contrainte de tension de bande (imposée par le procédé) et h est l'épaisseur de la tôle.

En combinant l'équation de Von Karman (1a) décrivant le flambement des tôles minces, la loi de comportement (1b) incluant les contraintes résiduelles N^{res} (contraintes post-emprise dues au laminage) et le développement (1e) - (1f) des inconnues w et N , le problème à résoudre est décrit par le système suivant :

$$D\Delta^2 w - \text{div}(N.\nabla w) = 0 \quad (1a)$$

$$N = L^m \gamma + N^{res} \quad (1b)$$

$$2\gamma = \nabla \tilde{u} + {}^t \nabla \tilde{u} + \nabla w \otimes \nabla w \quad (1c)$$

$$\text{div}(N) = 0 \quad (1d)$$

$$w = w_0 + w_1 e^{iqx} + \overline{w}_1 e^{-iqx} \quad (1e)$$

$$N = N_0 + N_2 e^{2iqx} + \overline{N}_2 e^{-2iqx} \quad (1f)$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ est la rigidité de la tôle, E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

Par l'approximation de Galerkin, l'enveloppe w_1 (supposée réelle) peut s'exprimer sous la forme $w_1 = a.W$ où a et W sont respectivement l'amplitude et le mode de flambage. Pour simplifier le modèle le plus possible, l'enveloppe w_1 (i.e. le mode W) est supposée varier lentement dans la direction de laminage. C'est équivalent à négliger les termes en $\frac{\partial}{\partial x}$ en présence des termes en $\frac{\partial}{\partial y}$ dans une même équation.

En passant à l'écriture énergétique, résoudre le système d'équations (1) est équivalent à résoudre une série de problèmes unidimensionnels parcourant toutes les sections de la tôle. Le problème est divisé en deux parties :

i) la partie linéaire (équivalente à résoudre un problème de valeurs propres) où le mode W , le nombre de demi ondes q et la contrainte critique sont à calculer :

$$D \int_{-l/2}^{l/2} \{ (W'' - q^2 W) (\delta W'' - q^2 \delta W) + 2(1-\nu) q^2 W'' \delta W + W \delta W'' + 2W' \delta W' \} dy = \int_{-l/2}^{l/2} (q^2 (N_x^{res} + \overline{N}_0) W \delta W + N_y^{res} W' \delta W') dy \quad (2)$$

ii) la partie non-linéaire où l'amplitude des défauts (i.e. l'enveloppe w_1) et la nouvelle distribution de contraintes vérifiant l'équilibre après flambage sont établies par la résolution du système suivant:

$$\frac{1}{Eh} \int_{-l/2}^{l/2} f_0^{(2)} \delta f_0^{(2)} dy = 2q^2 \int_{-l/2}^{l/2} (WW'' + W'^2) \delta f_0 dy \quad (3)$$

$$\frac{1}{Eh} \int_{-l/2}^{l/2} (f_2^{(2)} \delta f_2^{(2)} + 8q^2 f_2' \delta f_2' + 16q^4 f_2 \delta f_2) dy = -2q^2 \int_{-l/2}^{l/2} (WW'' - W'^2) \delta f_2 dy \quad (4)$$

$$D \int_{-l/2}^{l/2} \{ (W'' - q^2 W) (\delta W'' - q^2 \delta W) + 2(1-\nu) q^2 W'' \delta W + W \delta W'' + 2W' \delta W' \} dy - \int_{-l/2}^{l/2} (q^2 (N_x^{res} + \overline{N}_0) W \delta W + N_y^{res} W' \delta W') dy + a^2 \int_{-l/2}^{l/2} ((-N_{x2} + N_{x0}) q^2 W \delta W dy + a^2 \int_{-l/2}^{l/2} i q (N_{xy2} + N_{xy0}) (W \delta W' + \delta W W') + (N_{y2} + N_{y0}) q^2 W' \delta W') dy = 0 \quad (5)$$

où f_0 et f_2 sont les fonctions d'Airy associées respectivement à N_0 et N_2 .

4. Modèle de flambage : validation

4.1. Détection du mode et calcul de l'amplitude

La tôle d'acier utilisée est de longueur $L = 3000$ mm, de largeur $l = 855$ mm et d'épaisseur $h = 0,25$ mm. $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$.

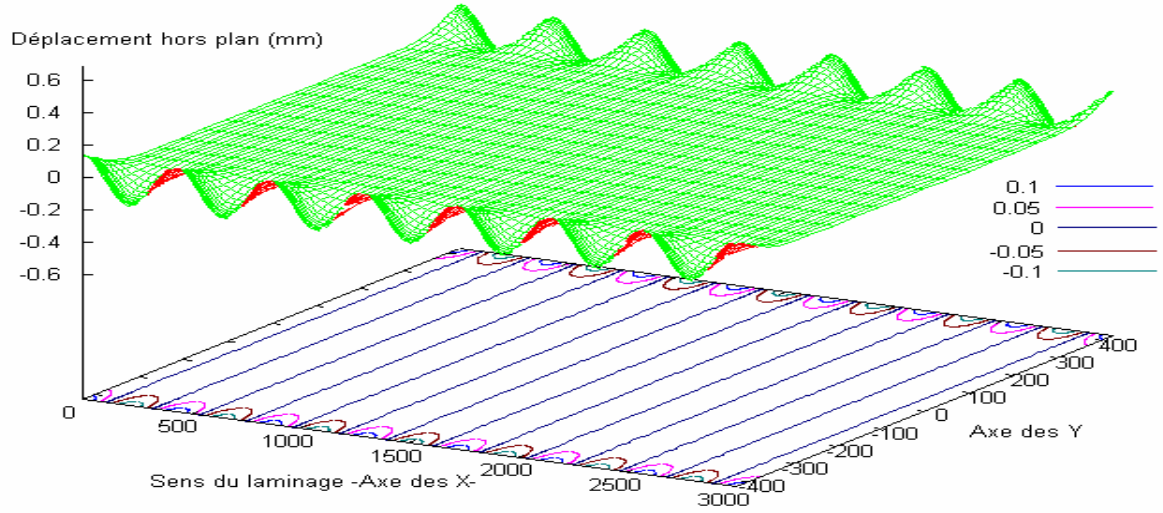


Fig. 3. Bord long $\sigma_{xx}^{res}(y) = 19(-6\left|\frac{y}{l}\right|^2 + \frac{1}{2})$, $T_0 = 10$ MPa :
longueur d'onde égale à 428,571 mm, amplitude=0,136 mm

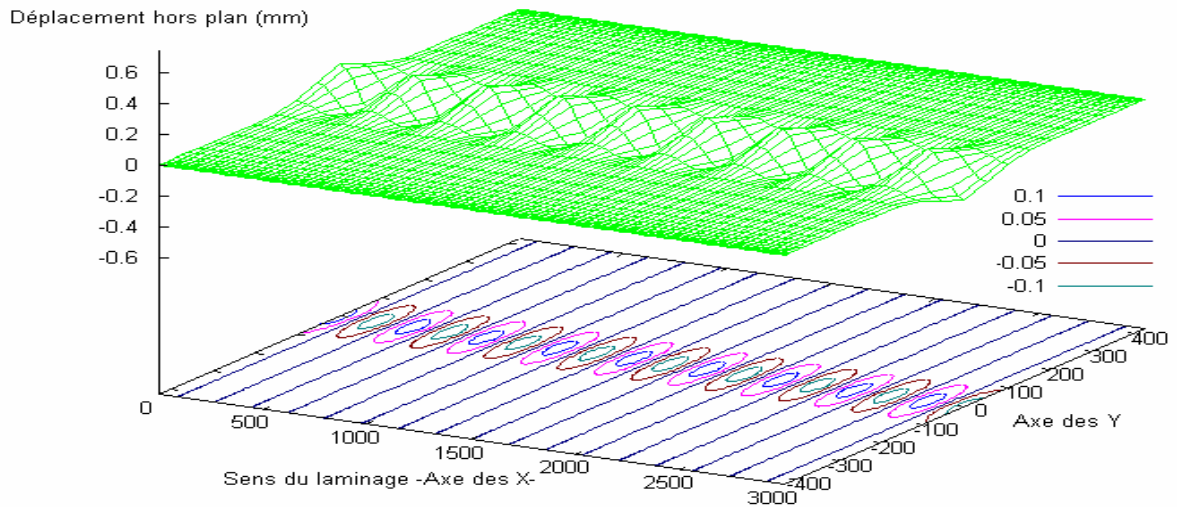


Fig. 4. Centre long $\sigma_{xx}^{res}(y) = -57(-6\left|\frac{y}{l}\right|^2 + \frac{1}{2})$, $T_0 = 10$ MPa :
longueur d'onde égale à 461,538 mm, amplitude=0,328 mm

Deux types différents de défauts, liés aux profils de contraintes résiduelles, sont testés. Le premier champ de contraintes résiduelles injecté $\sigma_{xx}^{res}(y) = 19(-6\left|\frac{y}{l}\right|^2 + \frac{1}{2})$ est tel qu'un défaut de type bord long est attendu. Le deuxième $\sigma_{xx}^{res}(y) = -57(-6\left|\frac{y}{l}\right|^2 + \frac{1}{2})$ induit un centre long. Ces deux champs sont uniformes tout au long de la tôle (dans la direction x). Pour illustrer les défauts apparaissant pendant le

laminage, la tôle est soumise à une tension de bande (T_0) égale à 10 MPa dans les Fig. 3 et Fig. 4, où les modes de flambage trouvés sont illustrés.

La contrainte critique σ_c obtenue en résolvant le problème aux valeurs propres (2) est égale à -12,986 MPa. Les longueurs d'ondes (calculées sous la forme $\frac{2.\pi}{q}$) respectives du bord long et du centre long

sont égales à 428,571 mm et 461,538 mm, les amplitudes sont respectivement égales à 0,136 mm et 0,328 mm.

4.2. Discussions et Confrontations Numériques/Analytiques

Pour confronter les résultats numériques à ceux, analytiques, de la littérature, le même champ de contraintes résiduelles utilisé dans [15,16] est adopté : $\sigma_{xx}^{res}(y) = -6\left|\frac{y}{l}\right|^2 + \frac{1}{2}$, $\sigma_{yy}^{res}(y) = \sigma_{xy}^{res}(y) = 0$.

Plusieurs valeurs de tractions sont testées, de 20 à 100 MPa comme précisé Tableau 1 ci-dessous.

La Fig. 5 décrit l'évolution de la contrainte critique et les longueurs d'ondes en fonction de la traction. La valeur critique (en module) croît linéairement avec une traction progressive. C'est logique puisqu'une augmentation de la traction augmente la rigidité de la tôle et donc sa capacité à tolérer une compression plus grande dans son plan. De plus, la longueur d'onde diminue avec la croissance de la traction, ce qui est conforme à son effet stabilisateur dans le sens longitudinal : au-delà d'une certaine valeur de traction, la tôle sera suffisamment rigide et ne flambera plus sous l'impact des contraintes résiduelles compressives.

Le Tableau 1 et la Fig.5 montrent un bon accord entre les valeurs numériques des contraintes résiduelles et des longueurs d'ondes, calculées par notre modèle, et celles calculées analytiquement dans [14,15] ; l'erreur relative peut être chiffrée à moins de 5%.

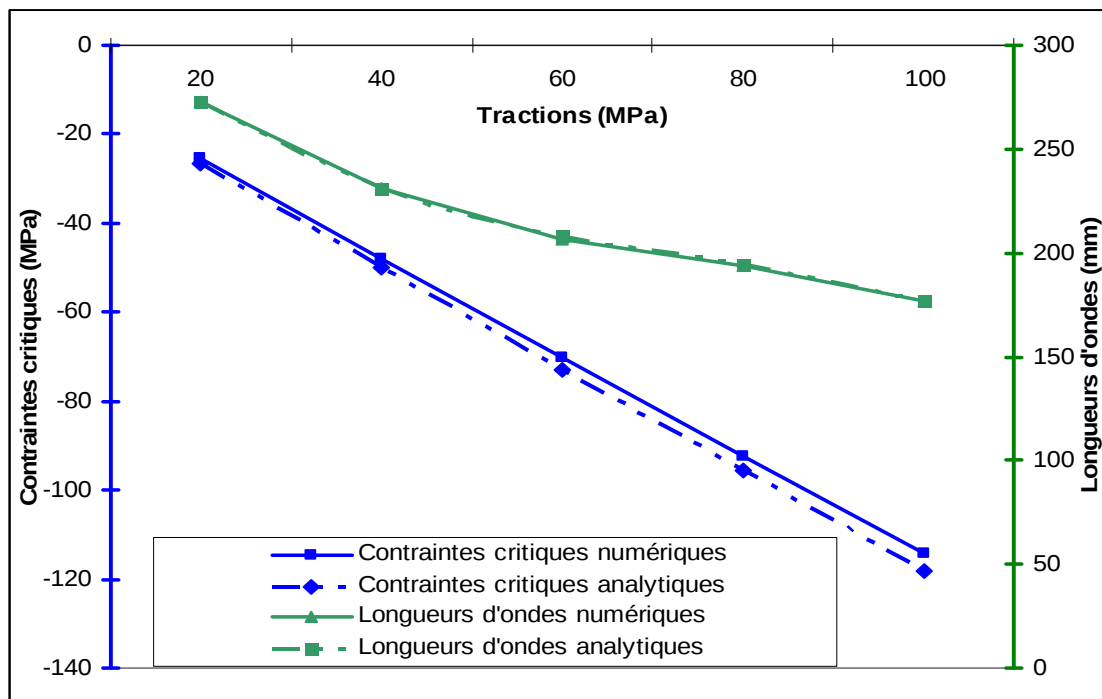


Fig. 5. Evolution de la contrainte critique et de la longueur d'onde en fonction d'une traction croissante.

Tractions (MPa)	20	40	60	80	100
Contraintes critiques : Solution Analytique (MPa)	-26,47	-50,08	-73,10	-95,77	-118,24
Contraintes critiques : Solution Numérique (MPa)	-25,21	-47,99	-70,33	-92,42	-114,34
Erreur relative %	4,76	4,17	3,79	3,49	3,29
Longueur d'onde : Solution Analytique (mm)	272,72	230,76	208,33	194,80	176,47
Longueur d'onde : Solution Numérique (mm)	272,72	230,76	206,89	193,54	176,47
Erreur relative %	0	0	0,69	0,64	0

Tableau 1. Comparaison des valeurs numériques (des contraintes critiques et longueurs d'ondes) avec la solution analytique pour différentes valeurs de tractions.

5. Vers le couplage *Lam3/Tec3* - modèle de flambage

Comme cité dans de nombreux articles [10,13], le flambement de la tôle change la distribution des contraintes pour vérifier un nouvel état d'équilibre après flambage, d'où la nécessité de calculer la carte de la déformation équivalente à ce phénomène.

En parcourant toute la tôle, section par section, la méthode multi-échelle permet de trouver l'amplitude et le nombre de demi-ondes q . La déformation issue du flambement de la tôle peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\gamma^{\text{fl}} = \begin{pmatrix} a^2 q^2 W^2 \\ a^2 W'^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2 q^2 W^2 \\ a^2 W'^2 \\ iqWW' \end{pmatrix} e^{2iqx} + \begin{pmatrix} -a^2 q^2 W^2 \\ a^2 W'^2 \\ -iqWW' \end{pmatrix} e^{-2iqx} \quad (6)$$

Cette déformation supplémentaire (qui se traduit par des contraintes supplémentaires) doit être ajoutée aux termes classiques de *Lam3/Tec3* de façon à modifier les intégrations suivant les lignes de courant et à ajuster la distribution des contraintes après flambement. Une fois les effets de flambage pris en compte sur l'état de la tôle, un nouvel équilibre est établi.

Une façon de coupler est d'intervenir après chaque itération de Newton-Raphson (juste après la réactualisation des lignes de courant): le champ de contraintes courant est parcouru section par section tout au long de la tôle, et la cartographie des déformations additionnelles est calculée à l'aide de l'équation (6) puis ajoutée élément par élément sur la déformation classique de *Lam3/Tec3*. Un tel couplage est délicat : ses effets sur la convergence de l'algorithme ne doivent pas être négligés. Une autre solution, sans doute plus stable, consiste à attendre la fin de l'algorithme de Newton-Raphson et, disposant alors de champs en équilibre, de calculer les déformations de flambement en vue de l'itération d'actualisation géométrique suivante.

6. Conclusions

Dans ce présent article, le problème des défauts de planéité (en particulier les ondulations dans la direction du laminage) a été abordé en présentant une combinaison potentiel de *Lam3/Tec3*, le modèle éléments finis de la déformation visco-élastoplastique de la tôle et la déformation élastique des cylindres de travail, et du modèle simplifié de flambage basé sur une méthode multi-échelle. Un récapitulatif du programme *Lam3/Tec3* et du principe de la méthode bi-échelle a été présenté.

Le modèle de flambage est prouvé capable de trouver le mode de flambage (contrainte critique, longueur d'onde), l'amplitude des défauts de planéité et de changer la distribution de contraintes pour

vérifier l'état d'équilibre après flambage. Deux types de défauts de planéité ont été illustrés : un bord long et un centre long. En plus, l'effet de la traction a été étudié : elle joue un rôle important pour empêcher la tôle de flamber sur ligne. Elle affecte la contrainte critique, la longueur d'onde et l'amplitude des défauts. En addition, une validation de ce modèle via une comparaison avec les valeurs analytiques trouvées dans la littérature a été établie. Les résultats sont trouvés satisfaisants et en bon accord. Enfin, un préliminaire de la façon de coupler ces deux modèles a été présenté brièvement.

Références

- [1] N. Damil, M. Potier-Ferry A generalized continuum approach to describe instability pattern formation by a multiple scale analysis. *Comptes Rendus Mécanique*, Vol 334, pages 674-678, 2006.
- [2] N. Damil, M. Potier-Ferry A generalized continuum approach to predict local buckling patterns of thin structures. *European Journal of Computational Mechanics*, Vol 17, pages 945-956, 2008.
- [3] A. Hacquin, P. Montmitonnet, J.P. Guilleraut, A steady state thermo-elastoviscoplastic finite element model of rolling with coupled thermo-elastic roll deformation, *J. Mater. Proc. Technol.* 60, 109-116, 1998.
- [4] A. Hacquin, P. Montmitonnet, J.P. Guilleraut, A 3D semi-analytical model of rolling stand deformation with finite element validation. *Eur. J. Mech. A (Solids)* 17, 1, 79-106, 1998.
- [5] K. Yamada, S. Ogawa, M. Ataka, 3D analysis of flat rolling using rigid-plastic FEM coupled with roll deformation analysis. *Proc. Numiform 92*, Chenot JL, Wood RD & Zienkiewicz OC, eds, Balkema, Rotterdam, 1992.
- [6] E. Pardo, D.C. Weckman, A fixed grid FE technique for modelling phase change in steady state conduction – advection problems. *Int. J. Num. Meth. Engg* 29, 969-984, 1990.
- [7] P. Gratacos, P. Montmitonnet, J.L. Chenot, An integration scheme for Prandtl-Reuss elastoplastic constitutive equations. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 33, 943-961, 1992.
- [8] K. N. Shohet, N.A. Townsend, Roll bending methods of crown control in four-high plate mills. *J. Iron Steel Inst.* 1088-1098, 1968.
- [9] B. Berger, O. Pawelski, P. Funke, Die elastische Verformung der Walzen von Vierwalzengerüsten. *Arch. Eisenhüttenwes.* 47, 6, 351-356, 1976 (en allemand).
- [10] S. Abdelkhalek Un exemple de flambage sous contraintes internes: Étude des défauts de planéité en laminage à froid des tôles minces. Thèse de doctorat, MINES ParisTech, 2010.
- [11] S. Abdelkhalek, P. Montmitonnet, N. Legrand, P. Buessler, Coupled approach for flatness predictions in thin strip cold rolling, *Int. J. Mech. Sci.* 53, 651-675, 2011.
- [12] S. Abdelkhalek, H. Zahrouni, P. Montmitonnet, N. Legrand, M. Potier-Ferry, Manifested flatness predictions in thin strip cold rolling using a general rolling FEM model. *Steel Res. Int. Sp. Issue ICTP*, 111-116, 2011.
- [13] C. Counhaye Modélisation et contrôle industriel de la géométrie des aciers laminés à froid. Thèse de doctorat, Université de Liège, 2000.
- [14] A. Bush, R. Nicholls et J. Tunstall, Stress levels for elastic buckling of rolled strip and plate. *Ironmaking and steelmaking* 28, 481-484, 2001.
- [15] F.D. Fisher, F.G. Rammerstorfer, N. Friedl, W. Wisser, Buckling phenomena related to rolling and levelling of sheet metal. *Int. J. Mech. Sci.* 42, 1887-1910, 2000.
- [16] F.G. Rammerstorfer, F.D. Fischer, and N. Friedl, Buckling of Free Infinite Strips Under Residual Stress and Global Tension. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol 68, pages 339-404, 2001.

Remerciements

L'étude a été réalisée dans le cadre de l'ANR PLATFORM, n° 2012-RNMP-019-07. Les auteurs souhaitent remercier tous les acteurs de ce projet : ArcelorMittal, CEA, CEMEF-MINES PARISTECH, Constellium, l'Ecole Centrale de Paris, INSA de Lyon et l'Université Paul Verlaine de Metz.