

# Détermination d'une matrice de mise à l'échelle

Nicolas Petit

► **To cite this version:**

Nicolas Petit. Détermination d'une matrice de mise à l'échelle. [Rapport de recherche] Centre Automatique et Systèmes MINES ParisTech. 2015. hal-01220574

**HAL Id: hal-01220574**

**<https://hal-mines-paristech.archives-ouvertes.fr/hal-01220574>**

Submitted on 19 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Détermination d'une matrice de mise à l'échelle

Nicolas Petit  
Centre Automatique et Systèmes  
MINES ParisTech  
PSL Research University

On considère un système [4]

$$\dot{x} = Af(x)$$

avec  $A$  matrice  $n \times n$  inconnue constante qu'on cherche à estimer. On mesure  $x \in \mathbb{R}^n$ , et on connaît  $f$ . On a établi le résultat suivant.

Un observateur asymptotique est, pour  $L > 0$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}f(x) - L(\hat{x} - x) \\ \dot{\hat{A}} = -(\hat{x} - x)f(x)^T \end{cases}$$

Il converge asymptotiquement sous l'hypothèse d'excitation persistente [2, 3] :  $\forall T, \exists \epsilon > 0$  tel que  $\text{span}\{f(x(t)), t \in [T, T + \epsilon]\} = \mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* On considère

$$V = \frac{1}{2} \|\hat{x} - x\|^2 + \frac{1}{2} \|\hat{A} - A\|_{Frobenius}^2$$

avec, pour toute matrice  $n \times n$ ,  $\|N\|_{Frobenius}^2 = \text{trace}(N^T N)$ .

Il vient

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{x}^T \left( (\hat{A} - A)f(x) - L\tilde{x} \right) + \text{trace}(\tilde{A}^T \dot{\hat{A}}) \\ &= -L \|\tilde{x}\|^2 + \tilde{x}^T \tilde{A}f(x) - \text{trace}(\tilde{A}^T \tilde{x}f(x)^T) \end{aligned}$$

or,  $\text{trace}(\tilde{A}^T \tilde{x}f(x)^T) = \text{trace}(f(x)^T \tilde{A}^T \tilde{x}) = \text{trace}(\tilde{x}^T \tilde{A}f(x)) = \tilde{x}^T \tilde{A}f(x)$ , d'où

$$\dot{V} = -L \|\tilde{x}\|^2$$

Par le principe d'invariance de LaSalle [4] (en fait la version d'excitation persistente de ce résultat), la convergence de  $\hat{A}$  vers  $A$  est garantie par la satisfaction des deux équations de l'ensemble invariant vers lequel on converge

$$x = \hat{x}, \quad \hat{A}f(x) = Af(x)$$

Si l'hypothèse sur la persistance d'excitation est vérifiée, alors  $\hat{A}$  converge asymptotiquement vers  $A$ .  $\square$

---

Travaux réalisés par le Centre Automatique et Systèmes (CAS) commun à ARMINES et MINES Paris-Tech dans le cadre de la procédure RAPID, projet Lorelei financé par la DGCIS

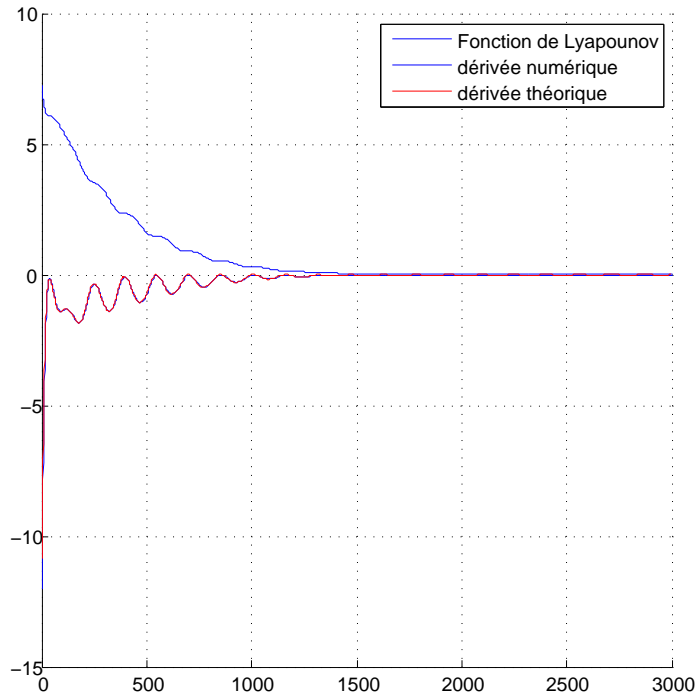


FIGURE 1 – Estimation d’une matrice de facteur d’échelle dans une dynamique (cas 2D).

**Exemple en dimension 2 ou 3** On cherche à identifier la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1.0000 & 0.2500 \\ 0.5000 & 2.0000 \end{pmatrix}$$

La fonction  $f$  est choisie de telle sorte que  $x$  décrive un cercle dans le plan, ce qui satisfait la condition d’excitation persistente. La matrice est bien reconstituée

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -1.0055262 & 0.2330998 \\ 0.4916656 & 1.9934972 \end{pmatrix}$$

La fonction de Lyapounov  $V$  est bien décroissante, voir Figure 1. Dans le cas 3D qui nous intéresse potentiellement pour les applications (la restriction à un plan étant tout à fait suffisante dans de nombreux cas), on obtient des résultats similaires, dès lors que la persistance d’excitation est bien garantie. La vitesse de convergence dépend de la quantité d’information présente dans le signal d’excitation, de la grandeur des gains, elle-même limitée par les bruits présents.

$$A = \begin{pmatrix} -1.0000 & 0.2500 & 0.1000 \\ -0.3000 & 2.5000 & 0.3800 \\ -0.1000 & -0.2000 & 1.2000 \end{pmatrix}$$

La matrice est bien reconstituée

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -0.9860 & 0.2223 & 0.1128 \\ -0.2785 & 2.3826 & 0.3388 \\ -0.1213 & -0.1796 & 1.1825 \end{pmatrix}$$

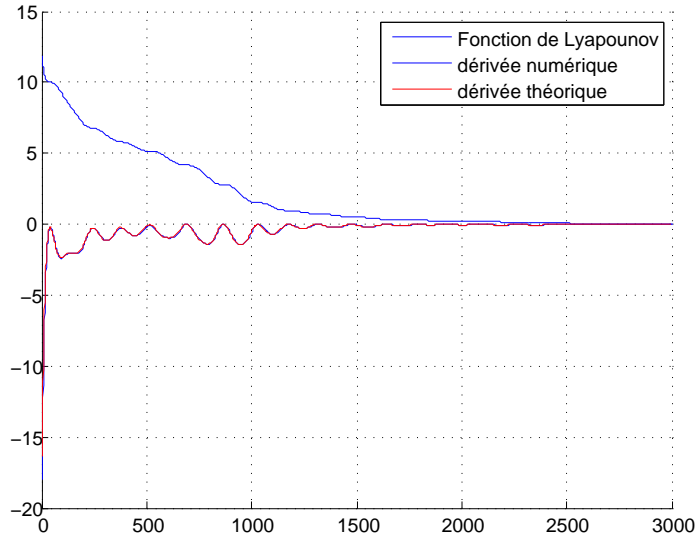


FIGURE 2 – Estimation d’une matrice de facteur d’échelle dans une dynamique (cas 3D).

**Extension** Si on s’abstrait de l’aspect filtrage, le problème qui nous préoccupe est celui de l’estimation d’une matrice reliant des entrées connues et des sorties connues. Soit  $e$  une entrée donnant une sortie  $s$  suivant une loi

$$s = Ae$$

où  $A$  est une matrice carrée. En utilisant la connaissance de  $e$  et de  $s$ , on va constituer un estimateur  $\hat{A}$  de  $A$ .

On intègre les données (on pourrait rajouter un facteur d’oubli, voir plus bas) suivant l’équation  $\dot{z} = s$  et on considère alors un estimateur  $(\bar{z}, \hat{A})$  de  $z$  et de  $B$  suivant les équations ( $\ell > 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{z} &= \hat{A}e - \ell(\bar{z} - z) \\ \frac{d}{dt} \hat{A} &= -(\bar{z} - z)e^T \end{aligned}$$

On peut initialiser ces équations avec un vecteur nul pour  $\bar{z}$  et une matrice nulle pour  $\hat{A}$ . Avantageusement, on pourra mettre une matrice de calibration initiale plausible dans  $\hat{A}$ .

Sous des hypothèses de persistance d’excitation que nous allons formuler, cet observateur converge, i.e.  $\hat{A} - A \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

*Démonstration.* Considérons la fonction de Lyapounov [4]

$$V = \frac{1}{2} \left\| \bar{z} - \int_0^t Ae(\tau)d\tau \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \hat{A} - A \right\|_{Fr}^2$$

où  $\|\cdot\|_{Fr}$  désigne la norme de Frobenius [1] des matrices  $\|M\|_{Fr}^2 = \text{trace}(M^T M)$  pour toute matrice  $M$ .

Alors, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V &= (\bar{z} - z)^T \left( (\hat{A} - A)e - \ell(\bar{z} - z) \right) - \text{trace} \left( (\hat{A} - A)^T A \right) \\ &= (\bar{z} - z)^T \left( (\hat{A} - A)e - \ell(\bar{z} - z) \right) - \text{trace} \left( (\hat{A} - A)^T (\bar{z} - z) e^T \right)\end{aligned}$$

or on a,

$$\begin{aligned}\text{trace}((\hat{A} - A)^T (\bar{z} - z) e^T) &= \text{trace}(e^T (\hat{A} - A)^T (\bar{z} - z)) \\ &= \text{trace}((\bar{z} - z)^T (\hat{A} - A) e) = (\bar{z} - z)^T (\hat{A} - A) e\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}V = -\ell \left\| \bar{z} - \int_0^t Ae(\tau) d\tau \right\|^2 \leq 0$$

D'après le principe d'invariance de LaSalle, l'estimateur converge vers le sous-ensemble tel que  $\hat{z} - \int_0^t Ae = 0$ . Il vient alors, en exploitant l'équation de la dynamique de l'observateur, dans l'ensemble invariant,  $\hat{A}e(t) = Ae(t)$ , c.-à-d.  $(\hat{A} - A)e(t) = 0$  pour tout  $t$ . Sous l'hypothèse d'excitation persistente, qui dit que *lorsque  $t$  varie  $e(t)$  engendre tout  $R^n$* , alors  $\hat{A}$  converge vers  $A$ .

Si désormais on introduit un facteur d'oubli exponentiel  $\gamma > 0$  par ce qu'on a peut confiance dans les mesures anciennes, sous la forme

$$z(t) = \int_0^t \exp(-\gamma(t - \tau)) Ae(\tau) d\tau$$

alors on a

$$\dot{z} = -\gamma z + y$$

L'estimateur associé est simplement

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{z} &= -\gamma\bar{z} + \hat{A}e - \ell(\bar{z} - z) \\ \frac{d}{dt}\hat{A} &= -(\bar{z} - z) e^T\end{aligned}$$

La preuve est identique. □

## Références

- [1] Nicholas J. Higham. *Functions of Matrices : Theory and Computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2008.
- [2] P. A. Ioannou and J. Sun. *Robust adaptive control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- [3] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, New York, 2nd edition, 1989.
- [4] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. MacMillan, 1992.