

# Détails sur la convergence instationnaire d'un algorithme de navigation magneto-inertielle

Nicolas Petit  
Centre Automatique et Systèmes  
MINES ParisTech  
PSL Research University

On reprend ici les notations usuelles de la navigation magnéto-inertielle (MINAV, c.f. Dorveaux, E. Navigation magnéto-inertielle : principes et application à un système podométrique indoor, Thèse MINES ParisTech, 2011, [2]). On note  $X$  le vecteur d'état comprenant le champ magnétique perçu  $B$  (estimé), et la vitesse  $V$  (dans le référentiel engin ou porteur) estimée. On note  $\Omega$  le vecteur rotation entre le référentiel porteur et le référentiel inertiel initial. On note  $J$  la Jacobienne du champ magnétique perçu lors du déplacement. Les grandeurs surmontées d'un  $\tilde{\phantom{x}}$  sont les variables d'erreur entre les valeurs estimées et les vraies grandeurs.

De manière générale, avec deux gains  $l_1$  et  $l_2$  choisis pour faire converger l'observateur, on a les équations suivantes régissant les variables d'erreurs.

$$\dot{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} -\Omega(t) - l_1 J(t)J(t)^T & J(t) \\ -l_2 J(t)^T & -\Omega(t) \end{pmatrix} \tilde{X} = \tilde{A}(t)\tilde{X}$$

Naturellement, la matrice définie ci-dessus  $\tilde{A}$  dépend du temps. Pour analyser la convergence de l'observateur, on introduit une fonction de Lyapounov candidate

$$W(\tilde{X}) = \frac{1}{2} \|\tilde{B}\|^2 + \frac{1}{2l_2} \|\tilde{V}\|^2$$

dont la dérivée le long des trajectoires est

$$\dot{W} = -l_1 \tilde{B}^T J(t)J(t)^T \tilde{B} = -l_1 \tilde{X}^T \tilde{C}^T(t)\tilde{C}(t)\tilde{X}$$

avec

$$\tilde{C} = [J(t)^T 0]$$

Pour garantir la convergence des estimées vers les vraies valeurs il faut que le système *linéaire instationnaire* précédent converge vers 0.

Or, ceci n'est pas automatiquement garanti par la simple négativité de la dérivée de  $\dot{W}$ . Comme cela est connu (voir par exemple Khalil, "Nonlinear systems", MacMillan 1992 page 326-325, [4]), une hypothèse supplémentaire est requise. Pour utiliser l'esprit du principe d'invariance de LaSalle, il faut que l'ensemble où la dérivée de la fonction de Lyapounov

---

Travaux réalisés par le Centre Automatique et Systèmes (CAS) commun à ARMINES et MINES Paris-Tech dans le cadre de la procédure RAPID, projet Lorelei financé par la DGCIS

candidate est nulle soit caractérisé par une condition d'observabilité uniforme. Avec les notations précédentes, il importe que la paire  $(\tilde{A}(t), \tilde{C}(t))$  soit uniformément observable. Cette notion étend la notion usuelle d'observabilité dans le cas instationnaire (cad lorsque les matrices dépendent du temps). Si cette condition est garantie, alors on peut conclure. C'est une condition suffisante.

La notion d'observabilité uniforme est définie comme suit (c.f. notamment Kalman, R.E. "Contributions to the theory of optimal control", Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 1960, comme référence historique, voir aussi [1]). Soit l'ensemble de matrices, définies par récurrence suivant

$$Q_0(t) = \tilde{C}(t)^T, \quad Q_{i+1}(t) = \dot{Q}_i(t) + \tilde{A}(t)^T Q_i(t)$$

Si, pour tout  $t$ , avec  $m \in \mathbb{N}$ , on peut borner inférieurement la matrice symétrique positive (non nécessairement définie)  $\sum_{i=0}^m Q_i(t)Q_i(t)^T \geq \mu I > 0$  avec  $\mu > 0$  une constante (la borne inférieure ne dépend donc pas du temps), alors le système est uniformément complètement observable (UCO).

Dans le cas de la navigation magneto-inertielle, de manière assez marquante, on peut vérifier que cette condition est toujours remplie, en calculant explicitement les deux premiers éléments de la suite

$$Q_0(t) = \tilde{C}(t)^T = \begin{pmatrix} J(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1(t) = \begin{pmatrix} \dot{J}(t) + \Omega J - l_1 J(t)J(t)^T J(t) \\ J(t)^T J(t) \end{pmatrix}$$

En concaténant ces deux matrices, on obtient

$$(1) \quad Q = [Q_0(t)Q_1(t)] = \begin{pmatrix} J(t) & \dot{J}(t) + \Omega J - l_1 J(t)J(t)^T J(t) \\ 0 & J(t)^T J(t) \end{pmatrix}$$

Il suffit maintenant d'établir que

$$Q(t)Q(t)^T \geq \mu I > 0$$

avec  $\mu > 0$  à déterminer.

Pour cela, on doit établir un lemme sur la préservation de l'inversibilité d'une matrice perturbée sous forme triangulaire

$$\begin{pmatrix} M(t) & B(t) \\ 0 & N(t) \end{pmatrix}$$

On utilise les notations usuelles de normes de matrices  $\|A\|_\infty$  est le plus grand des coefficients de la matrice  $A$  (en valeur absolue), voir [3].

**Lemme 1.** Si  $M(t)^T M(t) \geq \mu_1 I$ ,  $N(t)^T N(t) \geq \mu_2 I$ ,  $\|B(t)\|_\infty \leq \gamma$ , alors la plus petite valeur singulière de  $Q(t)$  est minorée par  $\sqrt{\mu}$  avec

$$\mu = \left( \max \left( \frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2} \right) + \gamma \frac{n^{3/2}}{\mu_1 \mu_2} (\sqrt{\mu_1} + \gamma \sqrt{n}) \right)^{-1}$$

*Démonstration.* On commence par remarquer que pour toute matrice  $P$ , la plus grande valeur singulière de  $P$  est égale à  $\|P\|_2$ . Les valeurs singulières de  $P^{-1}$  sont les inverses des valeurs singulière de  $P$ . On a donc

$$\|P\|_2 \geq \frac{1}{\|P^{-1}\|_2}$$

Dans le cas qui nous intéresse, on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} M(t)^{-1} & -M(t)^{-1}B(t)N(t)^{-1} \\ 0 & N(t)^{-1} \end{pmatrix}$$

Donc,  $\|P^{-1}\|_2$  peut être majorée comme suit

$$(2) \quad \|P^{-1}\|_2^2 = \max_{\|x\|=1, x \in \mathbb{R}^6} x^T P^{-1}(t) P^{-T}(t) x$$

En notant que

$$P^{-1}(t)P^{-T}(t) = \begin{pmatrix} M^{-1}M^{-T} + M^{-1}BN^{-1}N^{-T}B^T M^{-T} & -M^{-1}BN^{-1}N^{-T} \\ -N^{-1}N^{-T}B^T M^{-T} & N^{-1}N^{-T} \end{pmatrix}$$

on a alors

$$\begin{aligned} x^T P^{-1}(t)P^{-T}(t)x &= x^T \begin{pmatrix} M^{-1}M^{-T} & 0 \\ 0 & N^{-1}N^{-T} \end{pmatrix} x \\ &+ x^T \begin{pmatrix} M^{-1}BN^{-1}N^{-T}B^T M^{-T} & -M^{-1}BN^{-1}N^{-T} \\ -N^{-1}N^{-T}B^T M^{-T} & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

On souhaite évaluer cette valeur pour  $\|x\| = 1$ . Or, par hypothèse,

$$\|M^{-1}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}, \quad \|N^{-1}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}$$

et pour toute matrice  $G$  de dimension  $n \times n$ , on a

$$\|G\|_\infty \leq \sqrt{n} \|G\|_2$$

ce qui donne  $\|M^{-1}\|_\infty < \sqrt{\frac{n}{\mu_1}}$ ,  $\|N^{-1}\|_\infty < \sqrt{\frac{n}{\mu_2}}$ . De plus, la norme  $\|\cdot\|_\infty$  est *consistante* car c'est une norme induite (voir [Higham, Functions of Matrices : Theory and Computation, p 327]), i.e.  $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$ , pour toutes matrices  $A$  et  $B$ . D'autre part, pour toute matrice  $M$ , pour tout  $\|x\| = 1$ , on a  $x^T M x \leq \|M\|_\infty$ . Finalement, pour toutes matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , on a

$$\left\| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \max(\|A\|_\infty + \|B\|_\infty, \|C\|_\infty + \|D\|_\infty)$$

Ceci donne alors le résultat recherché

$$\|P^{-1}\|_2^2 \leq \max\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right) + \gamma \frac{n^{3/2}}{\mu_1 \mu_2} (\sqrt{\mu_1} + \gamma \sqrt{n})$$

□

A partir de ce résultat, on établit

**Lemme 2.** Soit  $l_1 > 0$ ,  $l_2 > 0$ , et  $J(t)$  tel qu'il existe  $\mu_1, \gamma_1$  tels que pour tout  $t$ ,  $J(t)^T J(t) \geq \mu_1 I$ ,  $\|J(t)\|_\infty \leq \gamma_1$ ,  $\|\dot{J}(t)\|_\infty \leq \gamma'_1$  et  $\Omega(t)$  tel que  $\|\Omega(t)\|_\infty \leq \gamma_2$  pour tout  $t$ , alors il existe  $\mu > 0$  tel que

$$Q(t)Q(t)^T \geq \mu I > 0$$

Ceci prouve que la paire  $(\tilde{A}, \tilde{C})$  est différentiellement observable, donc qu'elle est uniformément complètement observable. Ainsi, le filtre de reconstruction est globalement exponentiellement stable.

*Démonstration.* Les hypothèses  $l_1 > 0$  et  $l_2 > 0$  sont requises pour que  $W$  soit une fonction de Lyapounov candidate. Le Lemme 1 s'applique avec  $\mu_1$ ,  $\mu_2 = \mu_1^2$ ,  $\gamma = \gamma'_1 + \gamma_1(\gamma_2 + l_1\gamma_1^2)$ , ce qui donne la valeur désirée  $\mu$ .  $\square$

Ce lemme nous donne une condition suffisante pour obtenir la propriété UCO désirée dans le cas qui nous intéresse. En rapprochant l'équation (1) de ce lemme, on peut ici conclure que, si pour tout  $t$ ,

$$\begin{cases} J(t)^T J(t) \geq \mu_1 I, & \|J(t)\|_\infty \leq \gamma_1, & \|\dot{J}(t)\|_\infty \leq \gamma'_1 \\ \|\Omega(t)\|_\infty \leq \gamma_2 \end{cases}$$

alors il existe  $\mu > 0$  tel que

$$Q_o(t)Q_o(t)^T \geq \mu I > 0$$

et que donc l'observateur converge exponentiellement.

**Conclusion pratique** On peut traduire ces conditions mathématiques en termes concrets. Si on utilise l'observateur de reconstruction de la vitesse suivant la technique de navigation magnéto-inertielle dans un cas où le déplacement du porteur du système s'effectue à une vitesse telle que les matrices ne peuvent pas être considérées comme constantes (variation trop rapide du Jacobien perçu par exemple), alors si les conditions suivantes sont vérifiées : *i*) le Jacobien du champ est partout inversible, avec un conditionnement uniformément satisfaisant (la borne  $\mu_1$ ), *ii*) le Jacobien du champ n'est jamais infini (aucun de ses coefficients n'est infini), *iii*) les variations du Jacobien perçu sont bornées (la borne  $\gamma'_1$ ), *iv*) la rotation de l'engin n'est jamais infinie, alors la technique de navigation magnéto-inertielle permet bien de reconstituer la vitesse du porteur.

## Références

- [1] P.-J. Bristeau, N. Petit, and L. Praly. Design of a navigation filter by analysis of local observability. In *Proc. of the 49th IEEE Conf. on Decision and Control*, 2010.
- [2] E. Dorveaux. *Magneto-Inertial Navigation. Principles and application to an indoor pedometer*. PhD thesis, MINES ParisTech, 2011.
- [3] Nicholas J. Higham. *Functions of Matrices : Theory and Computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2008.
- [4] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. MacMillan, 1992.