

# Formulation éléments finis variationnelle adaptative et calcul massivement parallèle pour l'aérothermique industrielle

Alban Bazile

► **To cite this version:**

Alban Bazile. Formulation éléments finis variationnelle adaptative et calcul massivement parallèle pour l'aérothermique industrielle. [Rapport de recherche] Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. 2016, pp.17. hal-01497767

HAL Id: hal-01497767

<https://hal-mines-paristech.archives-ouvertes.fr/hal-01497767>

Submitted on 7 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS**  
CENTRE DE MISE EN FORME DES MATERIAUX



Formulation éléments finis variationnelle adaptative et calcul massivement  
parallèle pour l'aérothermique industrielle

Alban BAZILE

15 septembre 2016

La méthode multiéchelle et l'adaptation anisotrope de maillage, dont les résultats très prometteurs ont été mis en valeur dans de nombreux travaux. Cependant, ces deux méthodes ont été développées indépendamment l'une de l'autre et il n'existe pas, pour le moment, de couplage implicite entre l'estimateur d'erreur de modélisation et l'estimateur d'erreur anisotrope de discrétisation spatiale. Jusqu'à aujourd'hui, ce couplage était réalisé de manière explicite, c'est-à-dire, en utilisant les champs primaires comme critères d'adaptation. Dans ce rapport de recherche, nous souhaitons proposer un couplage implicite prenant directement en compte les variations des petites échelles. Plus particulièrement, on souhaite répondre à la question suivante: Comment peut-on prendre en compte l'erreur de modélisation des petites échelles dans l'adaptation anisotrope de maillage ?

# Contents

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Contexte Industriel CIFRE avec Safran Aircraft Engines</b>	<b>3</b>
1.1 Généralités sur le refroidissement des moteurs aéronautiques . . . . .	3
1.2 Premier cas d'application: refroidissement par impact de jets . . . . .	4
1.3 Intérêts des méthodes anisotropes adaptatives dans le cadre du refroidissement par impact de jets . . . . .	5
<b>2 Adaptation anisotrope de maillage non-structurés et estimateurs d'erreurs d'interpolation</b>	<b>6</b>
2.1 Principes de bases de l'adaptation anisotrope . . . . .	6
2.1.1 Lien entre l'erreur d'interpolation et la géométrie du maillage . . . . .	7
2.1.2 Construction du nouveau maillage à partir de la métrique . . . . .	8
2.1.3 Exemple de construction d'une métrique à partir du Hessien de la solution . . . . .	8
2.2 État de l'art de l'adaptation anisotrope de maillages par l'utilisation des estimateurs d'erreurs d'interpolation . . . . .	8
<b>3 Travaux envisagés: Adaptation anisotrope sur les échelles fines dans le cadre de la Variational Multiscale Simulation (VMS)</b>	<b>9</b>
3.1 Principes de l'approche VMS . . . . .	9
3.2 Adaptation anisotrope sur le sous-système aux échelles fines . . . . .	11
<b>Conclusion</b>	<b>12</b>
<b>Références</b>	<b>13</b>

## Introduction

La simulation numérique arrive aujourd'hui à un carrefour technologique pour plusieurs raisons. La première est l'incapacité des méthodes actuelles (telles que RANS, URANS, LES etc.) utilisées dans l'industrie aéronautique à prédire de manière précise l'aérodynamique des écoulements turbulents. Cela pose un certain nombre de problèmes, notamment en aérothermique où, dans un grand nombre de cas, les échanges thermiques sont majoritairement convectifs et se produisent dans des couches pariétales turbulentes. Il est donc nécessaire pour les industriels comme SAFRAN Aircraft Engines d'améliorer en continue leurs méthodes de simulation numérique pour prédire au mieux l'aérothermique des gaz au sein de leurs moteurs.

En parallèle, l'évolution des supercalculateurs est très rapide et les numériciens doivent sans cesse s'adapter aux nouveaux moyens de calcul. De nouvelles architectures hardware hétérogènes et parallèles voient le jour [1] [2]. Ces dernières demandent un effort de la part des développeurs logiciels qui doivent continuellement créer des algorithmes plus adaptés à ces nouvelles machines mais moins coûteux en énergie. C'est une des conditions nécessaires au passage à l'*Exascale*. D'après le rapport de la NASA [3], en se basant sur l'évolution des technologies actuelles, il est envisagé d'atteindre une performance crête de 30 exaFLOPS à l'horizon 2030. Pour atteindre cette performance, il sera nécessaire d'opérer un changement de paradigme complet de la simulation numérique nécessitant aussi bien une restructuration des architectures hardware qu'un effort d'adaptation au niveau des méthodes numériques, en passant par une implémentation algorithmique plus efficace. C'est également ce que constatent les participants du projet ExaFLOW [?] qui résumant parfaitement les objectifs de la Computational Fluid Dynamic (CFD) pour parvenir à l'*Exascale*:

1. Contrôle des erreurs et adaptation de maillage sur des géométries complexes,

2. Résilience et "fault tolerance" dans des simulations complexes,
3. Efficacité des solveurs par des méthodes de Galerkin mixtes, continues ou discontinues et par le choix approprié des préconditionneurs,
4. Modélisations hétérogènes pour permettre la présence d'algorithmes de résolution différents dans plusieurs zones du domaine,
5. Évaluation de l'efficacité énergétique dans l'implémentation du solveur,
6. Implémentation parallèle et compression des données de calcul.

C'est dans ce cadre numérique que s'inscrit ce sujet de thèse. L'objectif ici est d'apporter une contribution au développement de méthodes numériques plus adaptatives grâce à un contrôle hiérarchique des erreurs. Cela passera donc d'abord par un meilleur contrôle de l'erreur de discrétisation en appliquant l'adaptation anisotrope de maillage sur le système aux échelles fines dans le cadre d'une Variationnal Multiscale Simulation (VMS). Cette contribution se place donc dans le prolongement des études menées au CEMEF Mines-Paristech depuis plusieurs années sur l'adaptation parallèle et anisotrope de maillage non-structurés et, notamment, sur les estimateurs d'erreurs. Ce rapport s'attachera d'abord à décrire le contexte industriel et applicatif de ce sujet de thèse CIFRE, mettant en avant l'intérêt d'utiliser des méthodes adaptatives sur des maillages non-structurés pour répondre aux enjeux proposés par Safran Aircraft Engines. Ensuite, l'adaptation anisotrope, ses principes de bases et son état de l'art seront exposés en lien avec les travaux mathématiques autour des estimateurs d'erreurs utilisés dans notre cadre de travail. Enfin, les pistes de recherches envisagées pour le contrôle des erreurs de discrétisation sur les échelles fines dans le cadre d'une formulation éléments finis stabilisée seront données en dernière partie.

## 1 Contexte Industriel CIFRE avec Safran Aircraft Engines

La simulation numérique du comportement des gaz au sein des moteurs aéronautiques est un des grands enjeux du secteur aéronautique pour les 20 prochaines années [4]. Cela concerne entre autres: la simulation aérothermique instationnaire d'un moteur complet prenant en compte: la rotation des parties tournantes, les écoulements réactifs dans la chambre de combustion et les échanges thermiques dans les systèmes de refroidissement. C'est sur ces derniers que sont concentrés les travaux applicatifs de ce doctorat. Le but, à terme, est de pouvoir prédire, par la simulation numérique aérothermique, les performances de ces systèmes de refroidissement pour pouvoir se passer d'essais réels très coûteux et permettre de certifier ces moteurs uniquement grâce aux simulations numériques. Cela sera rendu possible par des simulations à très grandes échelles atteignant une précision *exaflopique* proche d'une DNS (Direct Numerical Simulation) et donc par l'utilisation de méthodes adaptatives permettant un contrôle hiérarchique des erreurs.

### 1.1 Généralités sur le refroidissement des moteurs aéronautiques

Concernant le refroidissement des moteurs, on assiste depuis plusieurs années à une augmentation du by-pass ratio (BPR) qui va induire une diminution du fan pressure ratio (FPR) défini comme suit:

$$FPR = \frac{MassFlowSecondary}{MassFlowPrimary} \quad (1)$$

Cette diminution du FPR implique une baisse de pression du flux secondaire du réacteur. Ce flux secondaire est l'alimentation principale de la plupart des systèmes de refroidissement du moteur et cette baisse de pression va avoir pour conséquence de dégrader les performances du refroidissement. Ce phénomène va être également accentué par l'augmentation des pressions et températures du flux principal. Les enjeux du refroidissement sont donc de plus en plus importants. C'est pour cela qu'Airbus, dans son programme NEO (New Engine Option) a accordé une attention toute particulière au refroidissement de la nacelle et des

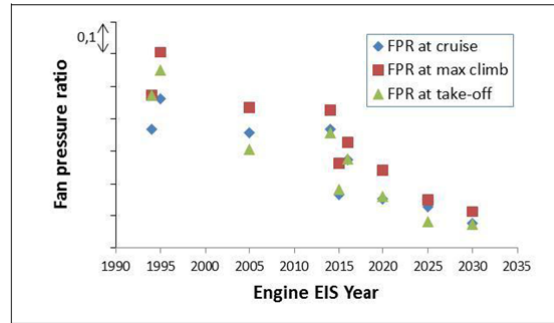


Figure 1: FPR versus Engine EIS (Entry Into Service) Year (Airbus Fleet)[5]

composants du moteur [5]. C'est le moteur LEAP de Safran Aircraft Engines qui a été choisit pour équiper les nouveaux Airbus A320 NEO, Boeing 737 Max et Comac C919.

Depuis plusieurs années, des études sur le refroidissement moteur ont été réalisées notamment en comparant les résultats expérimentaux avec les résultats obtenus par la simulation numérique. C'est ce qui est fait dans [4] où l'on cherche à estimer les échanges thermiques entre le fluide de refroidissement et les équipements du moteur. Grâce à des mesures expérimentales au niveau pariétal, on arrive à calculer précisément le coefficient de transfert convectif. En parallèle, une simulation numérique LES est menée et ces coefficients de transferts convectifs sont recalculés avec cette dernière. Cette comparaison montre d'abord que la simulation numérique permet bien de repérer les "points chauds" du moteur. Ceci est d'une importance cruciale pour la certification car c'est à cet endroit que se produisent en général les ruptures de matériaux. Malgré une bonne corrélation permettant une représentation complète de la topologie de l'écoulement, [4] montre qu'il y a encore des efforts à fournir pour contrer les effets de filtration induits par la LES.

Les travaux de Jean-Christophe Jouhaud du CERFACS [6] traitent aussi des problèmes liés à l'aérodynamique des nacelles de moteurs. Il étudie notamment le fameux problème "Jet In Cross Flow" (JICF) grâce à une méthode LES car c'est un écoulement fortement instationnaire et turbulent. La simulation utilisée vient du code de calcul elsA développé par l'ONERA et le CERFACS. Les résultats de cette étude montrent que l'énergie cinétique turbulente est sous estimée au niveau de la paroi de la nacelle. Cela est dû au fait que, dans la région proche de la paroi, le cisaillement génère de petites échelles de turbulence qui ne sont pas capturées car seule une certaine partie du spectre de la turbulence est résolue. Dans cette étude [6], on peut une nouvelle fois observer que la topologie générale de l'écoulement est bien capturée et que les principaux effets liés aux obstacles sont bien représentés par la simulation. La conclusion de ces travaux est d'abord l'amélioration apportée par la LES par rapport aux méthodes RANS et URANS dans la résolution de la thermique de l'écoulement mais également la nécessité de résoudre plus précisément les petites échelles instationnaires et turbulentes qui semblent fortement piloter la thermique.

## 1.2 Premier cas d'application: refroidissement par impact de jets

Le premier cas d'application de nos travaux applicatifs de thèse nous a été fourni par Juan-Carlos Larroya-Huguet de Safran Aircraft Engines. Il entre dans le cadre du refroidissement des aubes de turbine du moteur qui s'est révélé être un cas extrêmement stratégique pour la société par les différentes difficultés de simulation numérique qu'il présente: très forts taux de turbulence, géométries très complexes, échanges thermiques convectifs pilotés par les petites échelles de turbulence... [7] [8] [9]. Le phénomène physique étudié est le refroidissement par impact de jets à travers une paroi mince avec un écoulement cisailant amont. Les études réalisées au Département Méthodes et Outils de Développement de la Safran Aircraft Engines font suite aux travaux expérimentaux de Daniel Thibault [10] et de Matthieu Fénot [11] [12] [13]. L'objectif de Safran Aircraft Engines est de corréler, par la simulation numérique, les résultats obtenus dans [10]. Pour le moment, des méthodes RANS/URANS, des méthodes hybrides (LES- ZDES wall-layer model - DDES) [14] et des modèles de turbulence ( $k-\epsilon$  réalizable,  $k-\omega$  SST and  $v^2f$ ) sont utilisées avec le logiciel

Fluent et les codes de calculs présents à l'ONERA. Les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants. Le premier objectif applicatif de notre étude est donc d'essayer d'obtenir de meilleurs résultats avec les méthodes anisotropes et adaptatives dont nous disposons au CEMEF Mines-Paristech.

Le refroidissement d'une aube de turbine est réalisé grâce à l'injection d'air à l'intérieur de l'aube. Dans le cas du refroidissement par impact de jets, une chemise est creusée à l'intérieur de l'aube et percée de plusieurs orifices qui envoient de l'air sur la paroi interne de l'aube pour la refroidir (Voir Figure 2).

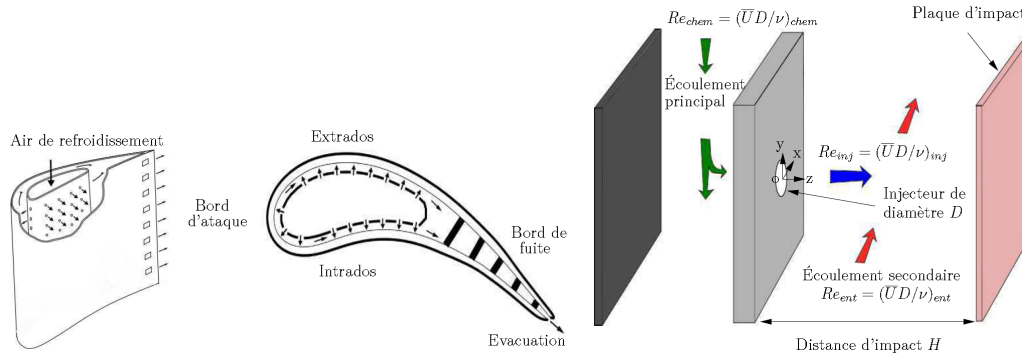


Figure 2: Refroidissement par impact de jets (gauche) Schéma de la veine d'essai (droite) [10]

Cette étude expérimentale comporte trois bancs d'essais. Le premier consiste en un jet unique sur plaque plane représentatif de la zone intrados/extrados de l'aube. Le second traite le cas d'une rangée de jets sur paroi concave représentatif du bord d'attaque de l'aube. Enfin, le dernier montage expérimental a pour but de simuler une géométrie complète d'aube de turbine avec un réseau de jets. Dans un premier temps, nous ne nous intéresserons qu'au premier cas (jet unique). La description topologique aérothermique du jet unique est décrite dans [10]. Nous montrerons dans ce rapport bibliographique uniquement le montage expérimental dans le but que le lecteur se rend bien compte du caractère tridimensionnel du jet étudié (Voir Figure 2).

Les résultats expérimentaux de ce banc d'essai montrent que l'influence de l'épaisseur de la plaque d'impact, du nombre de Reynolds dans l'entrefer et du nombre de Reynolds dans la chemise n'est pas significative. Au contraire, l'influence du nombre de Reynolds d'injection et de la distance d'impact est elle très importante. L'interaction entre ces deux paramètres est aussi très importante à prendre en compte. Un résultat également important est que la répartition des coefficients d'échange de chaleur n'est pas axismétrique comme dans le cas d'un jet issue d'un tube long. Cette dissymétrie selon l'axe y s'explique par un jet se développant vers les y positifs. Cela induit une hétérogénéité de l'écoulement en sortie de buse "qui doit servir de base de réflexion pour les simulations numériques" [10]. En ce qui concerne la turbulence, on observe de forts niveaux de turbulence dès la sortie du jet (taux de turbulence de 40%) qui diminue ensuite selon l'axe z. La conclusion générale de ces études expérimentales [10] indique qu'il serait également intéressant d'approfondir la réflexion sur l'aspect interaction entre plusieurs jets. Cela pourrait permettre de fournir un outil complet pour la conception des systèmes de refroidissement appliqués aux aubes de turbines dans l'optique d'une simulation à très grande échelle du moteur complet.

### 1.3 Intérêts des méthodes anisotropes adaptatives dans le cadre du refroidissement par impact de jets

Les géométries intervenant dans les simulations numériques du refroidissement par impact de jets sont, comme nous venons de le voir, très complexes. Il est donc nécessaire d'avoir des moyens de discrétisation spatiale autonomes qui permettent de contrôler les erreurs de discrétisation pour s'assurer que l'on conserve la précision souhaitée aux endroits du domaine où les échanges thermiques ont lieu et dans les directions dans lesquels ils se produisent. L'écoulement du cas d'application décrit dans le paragraphe précédent possède de très fort taux de turbulence (environ 40% à la sortie du trou d'injection [10]). Comme

nous l'avons vu à travers les travaux expérimentaux présentés précédemment, la plupart des échanges thermiques convectifs sont situés au niveau des couches limites pariétales turbulentes et sont pilotés par de petites échelles de turbulence. Il est donc nécessaire d'avoir un maillage fin dans ces couches et dans la direction orthogonale à ces dernières. Comme nous le verrons par la suite, l'adaptation anisotrope permet de répondre parfaitement à cette contrainte topologique de l'écoulement. Le caractère adaptatif permet de cibler ces couches et l'anisotropie permet d'aligner le maillage avec les variations de la solution.

De plus, l'adaptation anisotrope peut être mise en place de manière dynamique ce qui permet de résoudre aussi bien des problèmes stationnaires que des problèmes instationnaires. C'est un attrait de plus pour cette méthode qui, dans le cadre des exemples présentés ci-dessus, va nous permettre de connaître précisément la mise en place et l'évolution topologique de l'écoulement au cours du temps pendant le refroidissement du moteur. Cela n'est en effet pas possible avec des méthodes de résolution d'écoulement dites "moyennées". De plus, cela nous permet de considérer les fluctuations instationnaires de l'écoulement qui sont primordiales dans le pilotage des échanges thermiques.

Enfin, en permettant au maillage d'être moins raffiné et plus élargi à certains endroits ou dans certaines directions de moindre intérêt, cela nous permet d'économiser un nombre de maille très important. De nombreuses études dans la littérature ont montrés (Table 2 page 55 [15]) cet avantage. La réduction du nombre de degré de liberté du maillage permet en effet de réduire de manière significative le temps de calcul et donc d'envisager des simulations à plus grande échelle.

## 2 Adaptation anisotrope de maillage non-structurés et estimateurs d'erreurs d'interpolation

### 2.1 Principes de bases de l'adaptation anisotrope

Les maillages que nous utiliseront pour nos simulations numériques sont dits non-structurés et sont adaptés de façon anisotrope. Cela implique que les éléments du maillage ne sont pas alignés sur une grille unique et qu'ils peuvent se déformer dans certaines directions en fonction des besoins. Le principe est d'estimer l'erreur commise à chaque étape du calcul, de transformer cette estimation en une information numérique pertinente pour les autres étapes du calcul et de la corrélérer à la géométrie du maillage. En faisant cela à chaque étape du calcul, on converge progressivement vers un "maillage limite" qui correspond à la précision souhaitée. Le but de ces algorithmes est donc de converger vers un état fixe pour le couple formé par le maillage et la solution. Depuis plusieurs années au CEMEF Mines-Paristech, on utilise des métriques anisotropes en trois dimensions dont les spécifications de tailles dans chaque direction servent à gouverner les algorithmes d'adaptation de maillage [16] [17] [18] [19] [20]. Le principe est décrit Figure 3.

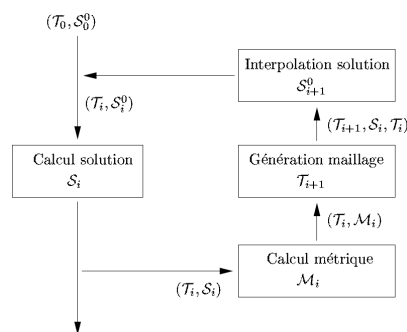


Figure 3: Schéma classique d'adaptation de maillage [?]



### 2.1.1 Lien entre l'erreur d'interpolation et la géométrie du maillage

Dans le cadre de l'adaptation anisotrope, le but est d'équiper (dans chaque direction) l'erreur d'interpolation évaluée sur le maillage, ce qui est équivalent à construire un maillage unité dans l'espace métrique. Pour bien comprendre l'algorithme d'adaptation de maillage, il est important de bien comprendre les métriques en tant qu'objets mathématiques et de s'en faire une bonne représentation géométrique. Ces métriques permettent de passer de l'espace euclidien dans lequel est réalisé le calcul à un espace métrique où la notion de distance et de produit scalaire sont définis grâce à un tenseur métrique. Un tenseur métrique en un point  $P$  d'un maillage  $T_h$  est défini par une matrice,  $M(d \times d)$  symétrique définie positive dont les coefficients dépendent de  $P$ . Le tenseur  $M$  est symétrique, il est donc diagonalisable et peut s'écrire sous la forme  $M = R\Lambda R^{-1}$ , où  $R$  est la matrice de vecteurs propres et  $\Lambda$  la matrice des valeurs propres de  $M$ . Ces métriques sont des outils très utiles pour l'adaptation de maillage grâce à leur flexibilité géométrique. Frédéric Alauzet dans [?] propose par exemple une méthode permettant d'intersecter ces métriques pour permettre une adaptation de maillage suivant plusieurs paramètres. Il est aussi possible de construire des interpolations de ces métriques pour rendre le champ de métrique continu sur tout le domaine. Nous allons maintenant nous intéresser au lien entre ces métriques et les estimateurs d'erreur.

Dans notre étude, le but de l'estimateur d'erreur est d'obtenir une majoration de l'erreur d'interpolation  $e = u - \Pi_h u$  sur un élément  $K$  du maillage avec  $\Pi_h u$  l'interpolée linéaire de  $u$  sur  $K$ . Cet estimateur d'erreur est de nature géométrique et ne dépend pas des EDPs à résoudre. Il peut donc être utilisé pour différents types d'équation (advection-diffusion, Navier-Stokes, chaleur, ondes, ...) et s'applique à toutes les variables du problème. Pour effectuer cette majoration, on se base sur un développement de Taylor de  $u - \Pi_h u$  dans une direction particulière. On note  $\nabla$  le gradient et  $H_u$  le Hessien de la variable  $u$ . On écrit alors le développement de Taylor avec reste intégral de  $e$  en un sommet de  $K$ , ici en  $a$ , par rapport à un point  $x$  quelconque dans  $K$ . On cherche à majorer  $u - \Pi_h u$  donc on cherche un point  $x$  où un extremum de cette fonction est atteint. On peut donc écrire:

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty, K} \leq c \max_{y \in \mathbb{R}} \max_{\vec{v} \subset K} \langle \vec{v}, |H_u(y)| \vec{v} \rangle \quad (2)$$

Cependant, cette expression n'est pas exploitable car elle fait intervenir deux maxima qui ne peuvent être évalués numériquement. En faisant intervenir les arêtes du maillage et en démontrant que tout vecteur  $\vec{v} \subset K$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des arêtes de  $K$ , on peut expliciter l'erreur d'interpolation  $\epsilon_K$  commise sur un élément  $K$  par:

$$\epsilon_K = c \max_{e \in E_K} \langle \vec{e}, \overline{M}(K) \vec{e} \rangle \quad (3)$$

avec  $\overline{M}(K)$  satisfaisant la relation suivante:

$$\max_{x \in K} \langle \vec{e}, |H_u(x)| \vec{e} \rangle \leq \langle \vec{e}, \overline{M}(K) \vec{e} \rangle, \text{ pour tout } e \in E_K. \quad (4)$$

avec  $E_K$  l'ensemble des arêtes de  $K$ .

D'après la relation (3), l'erreur d'interpolation commise sur l'élément  $K$  est donc proportionnelle au carré de la plus grande longueur des arêtes de  $K$  dans la métrique  $\overline{M}(K)$ . La corrélation entre l'erreur et la géométrie du maillage est donc bien réalisée ici. Pour des applications en Mécanique des Fluides, il est souvent conseillé de normaliser l'estimateur d'erreur pour obtenir une estimation de l'erreur relative locale comme montré dans [21]. Cette normalisation permet de mieux capturer les phénomènes de faible variation en présence de choc tout en conservant l'anisotropie du maillage dans les chocs. Dans le cadre d'une adaptation de maillage anisotrope pour un fluide compressible, cela nous conduit à raffiner de manière isotrope les régions où d'importants chocs ont lieu. Cela est dû à la discrétisation de la solution qui introduit des oscillations "virtuelles" dans la direction parallèle aux chocs. Pour conserver l'anisotropie, il est proposé dans [21] de filtrer ces oscillations avec le gradient local de la solution. Pour faire cela, un nouvel estimateur d'erreur est proposé. Ainsi, on parvient, par le biais du calcul d'un estimateur d'erreur d'interpolation choisit en fonction du problème à résoudre, à établir un lien entre l'erreur d'interpolation et la géométrie du maillage par le biais d'une métrique.

### 2.1.2 Construction du nouveau maillage à partir de la métrique

Maintenant que la corrélation entre l'erreur d'interpolation et la géométrie du maillage est établie, il faut déduire de cela un nouveau maillage sur lequel l'erreur est bornée par un seuil donné. L'erreur d'interpolation sur les éléments du maillage doit être équirépartie dans chaque direction pour pouvoir contrôler l'erreur de calcul. Soit  $\epsilon$  le seuil d'erreur *maximum* autorisé sur chaque éléments du maillage. Pour un élément  $K$  du maillage, d'après ce qui précède, les arêtes doivent vérifier, en définissant le tenseur métrique  $M(K) = \frac{c}{\epsilon} \overline{M}(K)$ :

$$\langle \vec{e}, \overline{M}(K) \vec{e} \rangle = 1 \iff (l_{M(K)}(\vec{e}))^2 = 1, \text{ pour tout } e \in E_K. \quad (5)$$

L'erreur d'interpolation sur un élément  $K$  est de l'ordre d' $\epsilon$  si la longueur des arêtes de  $K$  vaut 1 dans la métrique  $M(K)$ . Pour obtenir un maillage optimal, il faut donc que ce dernier soit un maillage unité (ou presque) dans la métrique définie ci-dessus.

### 2.1.3 Exemple de construction d'une métrique à partir du Hessien de la solution

L'inégalité (4) montre un point crucial de la construction d'une métrique pour l'adaptation de maillage anisotrope. On remarque en effet que cette dernière peut être construite grâce au Hessien de la solution  $u$ . Cela permet de bien comprendre le principe d'adaptation de maillage et notamment son intervention dans les zones de forts gradients. En effet,  $|H_u|$  est un tenseur métrique. On peut donc construire notre métrique en posant:

$$M = R \tilde{\Lambda} R^{-1}, \text{ avec } \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_3 \end{pmatrix} \text{ et, } \tilde{\lambda}_i = \min(\max(\frac{c|\lambda_i|}{\epsilon}, \frac{1}{h_{max}^2}), \frac{1}{h_{min}^2}) \quad (6)$$

où  $R$  est la matrice des vecteurs propres et les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la matrice hessienne  $H_u$  et où  $c$  est la constante visible dans la relation (3).  $h_{min}$  et  $h_{max}$  sont des valeurs limites de tailles de maille pour éviter que les arêtes soient de longueur infinies dans les régions où la solution est linéaire (i.e. là où une valeur propre de  $H_u$  s'annule). Ensuite, le plus délicat est de réussir à évaluer ou reconstruire convenablement le hessien de la solution (ou d'un champ scalaire discret) mais nous ne rentrerons pas dans les détails ici. On peut trouver de nombreuses méthodes dans la littérature comme celle des moindres carrés par exemple. Ce n'est pas un travail aisé car il faut que les coûts de calcul pour reconstruire le Hessien ne soient pas trop importants comparés à la résolution de l'algorithme. Cette reconstruction peut être extrêmement chronophage en fonction de la méthode choisie. (Voir les travaux [22] [23] [24] pour plus de détails).

## 2.2 État de l'art de l'adaptation anisotrope de maillages par l'utilisation des estimateurs d'erreurs d'interpolation

Maintenant que notre principe d'adaptation anisotrope de maillage non-structurés est bien posé, intéressons-nous à l'état des recherches de nos pairs sur le sujet. La problématique des maillages optimaux intéresse en effet les numériciens depuis le début des années 70 mais son intérêt pour des applications modernes arrivera à la fin des années 70 avec les contributions de Babuska et Rheinboldt [25] [26]. Pendant ces 20 dernières années, le sujet a pris beaucoup d'importance dans le domaine des éléments finis et l'utilisation d'estimateur d'erreur à posteriori est devenue très populaires en particulier grâce aux travaux de Zienkiewicz et Zhu [27] [28] mais aussi grâce aux nombreuses déclinaisons et améliorations qui ont suivi [29] [30] [31] [32] [33]. L'intérêt pour l'adaptation de maillage anisotrope basée sur une métrique dérivée de la reconstruction du Hessien connaît aujourd'hui un nouveau rebond avec certains résultats récents [34] [35] [36] [37] [38] [39]. Dans [24] par exemple, Vallet propose une comparaison numérique des différentes techniques de reconstruction du Hessien évoquée dans la partie précédente. L'intérêt de ces méthodes a été porté par le fait qu'elles soient capables de gérer les informations contenues dans les estimateurs d'erreurs en termes de géométrie du maillage et de direction d'évolution de ce dernier. La déformation de ce dernier

est, comme nous l'avons vu, intégré à l'algorithme au travers d'un espace métrique de Riemann et cette technique est extrêmement documentée dans la littérature [40] [41] [?] [42] [43] [44] [45] [46] [47] [48] [49]. Par cette technique, le nouveau maillage est déformé localement par rapport au maillage précédent et n'est donc pas généré utilisant les opérations traditionnelles comme l'insertion ou le déplacement de nœuds par exemple. Cela peut conduire à obtenir des éléments très étirés, avec des angles entre arêtes très importants. Ce n'est donc pas satisfaisant du point de vue de l'analyse standard des erreurs en éléments finis pour laquelle des hypothèses de régularité sur le maillage et sur la solution exacte doivent être satisfaites [50]. Cependant, si dans le cadre de l'adaptation anisotrope nous pouvons considérer que le maillage est aligné avec la solution, cette difficulté est contournée.

Comme nous venons de le voir, l'adaptation anisotrope de maillage par l'utilisation d'estimateurs d'erreurs d'interpolation est un champ de recherche encore très actif. Cependant, l'application de cette dernière et notamment le choix de l'estimateur d'erreur reste une question ouverte dont la réponse dépend essentiellement de la formulation éléments finis avec laquelle on travail. Nous allons justement, dans la partie suivante, concentrer nos efforts de recherche sur son utilisation dans le cadre d'une formulation éléments finis dite stabilisée et multi-échelles.

### **3 Travaux envisagés: Adaptation anisotrope sur les échelles fines dans le cadre de la Variationnal Multiscale Simulation (VMS)**

Pour aller plus loin dans les applications de l'adaptation anisotrope de maillage, l'axe de recherche qui nous intéressera particulièrement au cours de ce doctorat est celui concernant l'intervention de cette dernière dans le cadre d'une Variationnal Multiscale Simulation dite VMS. Nous rappellerons donc ici brièvement le principe de cette simulation multi-échelle de le cadre de la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles. En effet, les équations de Navier-Stokes incompressibles sont utilisées pour de nombreux écoulements en aérothermique moteur. Aux vues des nombres de Reynolds utilisés pour les écoulements qui nous intéressent (voir Section 1), elles constituent d'ailleurs la base de la résolution aérodynamique que nous utiliserons au cours de cette thèse. Il est donc nécessaire de pouvoir trouver une formulation éléments finis suffisamment robuste pour pouvoir résoudre ces écoulements [51]. La stabilité des formulations éléments finis est un verrou scientifique déterminant pour le passage à l'*Exascale* de part son lien direct avec la convergence des schémas numériques et donc des solveurs itératifs. Depuis plusieurs années au CEMEF Mines-Paristech, un effort de recherche conséquent a été placé dans le développement de formulations éléments finis dites "stabilisées" [52] [53] [54] [55] [56].

#### **3.1 Principes de l'approche VMS**

L'idée d'une approche multi-échelle vient en effet d'un besoin de stabilité dans les formulations éléments finis. Par le passé, certains travaux ont montré que les approches de Galerkin classiques appliquées aux équations de Navier-Stokes incompressibles ne fonctionnaient pas pour plusieurs raisons [57] [58] [59]. Premièrement, dans le cas de couches limites où de forts gradients de vitesse et pression sont mis en jeu, l'approximation classique de Galerkin mène à l'apparition d'oscillations. Ces oscillations peuvent se développer et contaminer la solution dans tout le domaine de calcul. Deuxièmement, l'utilisation inappropriée d'une combinaison de fonctions d'interpolations pour représenter les champs de vitesses et pressions conduit souvent à des schémas numériques instables. Par exemple, l'utilisation d'une combinaison de fonctions d'interpolations P1-P1 pour la vitesse et la pression ne permet pas d'obtenir de schémas numériques stables car la condition de Babuska-Brezzi n'est pas vérifiée [52]. Pour palier à ces problèmes, on utilise souvent des termes de stabilisation dans les équations incluant un certain nombre de paramètres stabilisant à choisir avec précaution. C'est ce qui est fait lors de l'utilisation de l'approche VMS dite Variational Multiscale Simulation [53].

Pour décrire cette méthode, il faut repartir des equations de Navier-Stokes incompressibles, écrire la formulation faible du système d'équations en définissant les espaces fonctionnels pour la vitesse et la pression dans lesquels on travaille. Ces espaces sont enrichis par des espaces bulles qui permettent d'éliminer les oscillations et les instabilités de pression [53] [60] [61], en séparant le problème global en deux sous problèmes: l'un portant sur les grandes échelles  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  et l'autre sur les échelles fines  $(\mathbf{u}', p')$ . La solution exacte s'écrira donc:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}'$  et  $p = p_h + p'$ . Pour représenter les échelles fines, on peut utiliser donc des fonctions bulles similaires aux "Mini-éléments". Le choix optimal de ces fonctions bulles est complètement corrélé au choix des termes stabilisants. Ensuite, l'approximation standard de Galerkin est appliquée et l'ajout du schéma stabilisateur sera directement issue du développement de la formulation VMS ce qui assurera sa consistance. La partie fine, non résolue, est modélisée en utilisant des termes basés sur les résidus dérivés des équations du système aux échelles fines. La "condensation statique" consiste ensuite à substituer la partie fine de la solution dans le problème aux grandes échelles permettant d'ajouter des termes ajustés grâce à un paramètre local stabilisant et dépendant de l'échelle de temps. De cette manière, on élimine l'apparence explicite des échelles fines mais on modélise quand même leurs effets.

On résout donc en premier lieu le problème aux échelles fines. La résolution du problème des échelles fines permet d'extraire deux paramètres stabilisant  $\tau_C$  et  $\tau_K$ .  $\tau_C$  va être déduit de l'équation de continuité et  $\tau_K$  va être déduit de l'équation du moment pour les échelles fines. Une fois que ce coefficient stabilisant  $\tau_C$  est défini, l'expression de  $p'$  est réinjectée dans le problème aux grandes échelles. Finalement, en substituant le résidu de l'équation de quantité de mouvement et en développant les différents termes grâce aux paramètres stabilisant, on obtient une nouvelle équation, exprimée uniquement avec des fonctions du problème aux grandes échelles. Le nouveau problème (pour des éléments tétraédriques linéaires) peut être décomposé en 4 termes principaux: le premier est la contribution de Galerkin, le second et le troisième prennent en compte l'influence des échelles fines de vitesse sur la formulation éléments finis, le dernier terme modélise l'influence des échelles fines de pression sur le problème aux grandes échelles.

$$\mathbf{u}'|_K = \tau_K \mathcal{R}_M \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (7)$$

$$p' \approx \tau_C \mathcal{R}_C \quad (8)$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_M &= \mathbf{f} - \rho \partial_t \mathbf{u}_h - \rho (\mathbf{u}_h + \mathbf{u}') \cdot \nabla \mathbf{u}_h - \nabla p_h \\ \mathcal{R}_C &= -\nabla \cdot \mathbf{u}_h \end{aligned} \quad (9)$$

et,

$$\tau_K = \frac{b_k \int_K b_k^* d\Omega}{\rho (\mathbf{u}_h \cdot \nabla b_K, b_K^u)_K + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(b_K) : \boldsymbol{\varepsilon}(b_K))_K} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (10)$$

$$\tau_C = \left( \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{c_2}{c_1} \frac{\|\mathbf{u}\|_K}{h} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (11)$$

avec  $c_1$  et  $c_2$  deux constantes indépendantes de  $h$ ,  $h$  étant la longueur caractéristique de l'élément.  $\mu$  la viscosité cinématique,  $\rho$  la masse volumique et  $b_K$  la *fonction bulle* de l'élément. Nous invitons le lecteur à se référer à [53] pour le détail du calcul.

$$\begin{aligned}
& \rho (\partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)_\Omega + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h))_\Omega - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_\Omega + (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h)_\Omega - (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)_\Omega \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\rho (\partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) + \nabla p_h - \mathbf{f}, \rho \mathbf{u}_h \nabla \mathbf{w}_h)_K \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\rho (\partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) + \nabla p_h - \mathbf{f}, \nabla q_h)_K \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\tau_c \nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_K = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_{h,0}, \quad \forall q_h \in Q_h
\end{aligned} \tag{12}$$

### 3.2 Adaptation anisotrope sur le sous-système aux échelles fines

Essayons à présent d'appliquer la technique d'adaptation anisotrope de maillage à la nouvelle formulation éléments finis décrite ci-dessus. Pour appliquer cette dernière, il faut en premier lieu, comme décrit dans la Section 2.1.1, trouver un estimateur d'erreur pertinent. Cette estimation ne portera plus uniquement sur la partie résolue  $\mathbf{u}_h$  de la solution mais également sur la partie aux échelles fines notée  $\mathbf{u}'$ . Plusieurs travaux récents basés sur la théorie multi-échelle proposent déjà un calcul explicite de l'erreur de sous-maille à l'intérieur de chaque élément grâce à l'enrichissement des espaces de solution [62] [63] [64]. Ces travaux se sont cependant restreints aux problèmes elliptiques. Concernant les équations de Navier-Stokes, ce sont les travaux de Johnson [65] [66] [67] qui placent les premières bases du développement des techniques basées sur le calcul explicite du résidu pour les équations de transport. Pour les équations de Navier-Stokes incompressibles, on trouve par exemple dans [?] cette technique utilisée avec des solutions calculées par le biais de méthodes stabilisées. Un exemple d'adaptation anisotrope de maillage utilisant cette technique de construction d'estimateurs d'erreurs peut également être trouvé dans [68] où l'on s'intéresse au cas de la modélisation des écoulements hydrodynamiques de surface. L'intérêt d'utiliser les paramètres stabilisant dans le calcul des estimateurs d'erreurs vient du fait que plusieurs études montrent qu'ils possèdent des informations précises sur les erreurs de discrétisation locales et globales [69]. Cela a été tenté dans [70] pour les écoulements incompressibles et dans [71] pour les échelles fines de fluctuation turbulente.

Comme nous avons pu le voir précédemment, la VMS et l'adaptation anisotrope de maillage, dont les résultats très prometteurs ont été mis en valeur dans de nombreux travaux [53] [72] [73]. Cependant, ces deux méthodes ont été développées indépendamment l'une de l'autre et il n'existe pas, pour le moment, de couplage implicite entre l'estimateur d'erreur de modélisation et l'estimateur d'erreur anisotrope de discrétisation spatiale. Jusqu'à aujourd'hui, ce couplage était réalisé de manière explicite, c'est-à-dire, en utilisant les champs primaires comme critères de l'adaptation anisotrope de maillage. Dans nos travaux, nous souhaitons proposer un couplage implicite prenant directement en compte les variations des petites échelles. La problématique de nos travaux peut donc être énoncée sous cette forme: *Comment peut-on prendre en compte l'erreur de modélisation des petites échelles dans l'adaptation anisotrope de maillage?*

Pour réaliser cela, nous nous appuyons d'abord sur les travaux de Hauke et al. [74] développés notamment par D. Irisarri dans [75] et [76]. Dans ces travaux, on trouve une expression de l'estimateur d'erreur portant sur l'erreur de modélisation qui se décompose en deux contributions:  $u'_{bub}$ , un *residual-based* estimateur à l'intérieur strict de l'élément, et  $u'_{poll}$  associé aux erreurs induites sur les frontières des éléments aux conditions aux limites du problème. Sans entrer ici dans le détail, leurs expressions sont données ci-après dans le cadre de conditions aux limites de Dirichlet [75]:

$$u'_{bub}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{bub}} c_i^b b_i(\mathbf{x}) \tag{13}$$

avec  $c_i^b$  constantes à déterminer associées au résidu et  $b_i$  une série de fonction de type bulles.

$$u'_{poll}(\mathbf{x}) = - \int_{\bar{\Gamma}} g^F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ([[\mathcal{B}\bar{u}]](\mathbf{y}) + [[\mathcal{B}u'_{bub}]](\mathbf{y})) d\Gamma_y + \sum_{j=1}^N g^F(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{b,j}) \chi_{b,j} \text{ for all } \mathbf{x} \in \Omega \tag{14}$$

avec  $g^F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  la fonction de Green de l'élément,  $[[\mathcal{B}\bar{u}]](\mathbf{y})$  l'opérateur *jump* du flux associé à la discontinuité de la solution FEM,  $[[\mathcal{B}u'_{bub}]](\mathbf{y})$  l'opérateur *jump* du flux associé à la discontinuité de  $u'_{bub}$  et les coefficients  $\chi_{b,j}$  jouant le rôle d'une fonction de densité sur les bords du domaine et satisfaisant les conditions aux limites.

Nous essaierons dans un premier temps d'utiliser  $u'_{bub}$  pour mettre à l'échelle les différents critères de l'adaptation de maillage.  $u'_{bub}$  sera donc utilisé en tant que facteur multiplicatif dans le cadre d'une adaptation isotrope de maillage. Nous chercherons ensuite une expression anisotrope de ce dernier pour l'utiliser comme critère direct de l'adaptation de maillage. Cette recherche mathématique théorique se fera en lien avec les travaux sur l'erreur d'interpolation déjà présents dans la littérature. L'avancée de ces travaux sera présentée au congrès.

Le comportement asymptotique de cette nouvelle méthode d'adaptation de maillage pourra être comparé à une DNS (Direct Numerical Simulation) grâce au contrôle hiérarchique des erreurs. En effet, la convergence d'une méthode VMS et de l'adaptation anisotrope de maillage nous permettra de prendre en compte les deux principales sources d'erreurs (interpolation et modélisation) commises lors de la détermination de la solution. La combinaison pertinente de ces deux erreurs rendra possible l'établissement d'une *hiérarchie* dans l'adaptation. Notamment, cela nous permettra d'arrêter le raffinement bien avant les méthodes classiques grâce à la prise en compte des phénomènes intervenant à l'échelle de sous-maille dans l'adaptation anisotrope du maillage.

## Conclusion

Pour conclure, le fil conducteur qui motive cette étude doctorale peut être résumé selon les termes suivants. Cela part d'abord d'un besoin des industriels de la propulsion aéronautique de pouvoir réaliser des simulation à l'échelle *Exascale* pour permettre la certification de leurs moteurs uniquement grâce à la simulation numérique. Cette dernière concerne notamment les systèmes de refroidissement dont les enjeux sont de plus en plus importants aux vues des conditions aérothermiques toujours plus extrêmes que l'on peut rencontrer au sein des moteurs. Le calcul massivement parallèle à l'échelle *Exascale* amène un certain nombre de verrous scientifiques sur lesquels les numériciens doivent se pencher pour répondre aux exigences de ces nouveaux moyens de calcul. L'un d'eux, traité dans ce sujet de thèse, concerne notamment le contrôle hiérarchique des erreurs et l'adaptation de maillage sur des géométries complexes. Nous proposons donc ici une extension des techniques d'adaptation de maillage dans le cadre d'une formulation éléments finis de type VMS qui sera testée et validée sur des cas industriels stratégiques pour Safran Aircraft Engines.

Je tiens à remercier chaleureusement Youssef Mesri, Elie Hachem et Juan-Carlos Larroya-Huguet pour l'attention portée à mon intégration au CEMEF Mines-Paristech et à l'équipe de recherche CFL. La patience et la pédagogie dont ils ont fait preuve a été essentielle pour la compréhension et l'intégration de ce sujet passionnant.

## References

- [1] Y. Mesri, H. Dignonnet, and T. Coupez, “Hierarchical adaptive multi-mesh partitioning algorithm on heterogeneous systems,” pp. 299–306, 2010.
- [2] Y. Mesri, J.-M. Gratien, O. M. Ricois, and R. Gayno, “Parallel Adaptive Mesh Refinement for Capturing Front Displacements: Application to Thermal EOR Processes.,” Society of Petroleum Engineers, Sept. 2013.
- [3] J. Slotnick, A. Khodadoust, J. Alonso, D. Darmofal, W. Gropp, E. Lurie, and D. Mavriplis, “CFD Vision 2030 Study: A Path to Revolutionary Computational Aerosciences,” tech. rep., 2014.
- [4] Y. Sommerer, D. Couton, and F. Plourde, “Dissipative Equipment Thermal Integration in Powerplant Compartment: Experimental and Numerical Evaluation of Heat Transfer Coefficient,” in *ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition*, American Society of Mechanical Engineers, 2014.
- [5] O. Verseux and Y. Sommerer, “New Challenges for Engine Nacelle Compartments Pressure and Thermal Loads Management With Aircraft Engine Evolution,” (St. Petersburg, Russia), Airbus Operation S.A.S, July 2014.
- [6] J.-C. Jouhaud, *Simulations Aérodynamiques et Aérothermiques Avancées pour la Conception et l’Amélioration des Avions*. Toulouse: CERFACS, Apr. 2008.
- [7] J.-C. Han, S. Dutta, and S. Ekkad, *Gas Turbine Heat Transfer and Cooling Technology, Second Edition*. CRC Press, 2012.
- [8] J.-C. Han, “Recent Studies in Turbine Blade Cooling,” *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 10, no. 6, pp. 443–457, 2004.
- [9] H. Iacovides and B. E. Launder, “Internal blade cooling: The Cinderella of computational and experimental fluid dynamics research in gas turbines,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*, vol. 221, pp. 265–290, May 2007.
- [10] D. Thibault, *Etude du refroidissement par impact de jets à travers une paroi mince et avec un écoulement cisailant amont: application aux aubes de turbines*. PhD thesis, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d’Aérotechnique-Poitiers, 2009.
- [11] M. Fenot, *Etude du refroidissement par impact de jets : application aux aubes de turbines*. PhD thesis, Université de Poitiers. UFR des sciences fondamentales et appliquées, Jan. 2004.
- [12] M. Fenot, L.-E. Brizzi, J.-J. Vullierme, E. Dorignac, and L. Descamps, “Measurements of flow and local heat transfer in an internally cooled turbine blade,” 2005.
- [13] M. Fenot, J.-J. Vullierme, and E. Dorignac, “A heat transfer measurement of jet impingement with high injection temperature,” *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 333, pp. 778–782, Oct. 2005.
- [14] E. Laroche and F. Chedeveigne, “Rapport d’Avancement AETHER C,” rapport Interne ONERA, ONERA, Toulouse, 2016.
- [15] R. Löhner and J. D. Baum, “Handling tens of thousands of cores with industrial/legacy codes: Approaches, implementation and timings,” *Computers & Fluids*, vol. 85, pp. 53–62, Oct. 2013.
- [16] T. Coupez, C. Gruau, C. Pequet, and J. Bruchon, “Metric map and anisotropic mesh adaptation for static and moving surfaces,” in *World Congress on Computational Mechanics IV, Beijing*, pp. 5–10, 2004.

- [17] Y. Mesri, *Gestion et contrôle des maillages non structurés anisotropes : applications en aérodynamique*. PhD thesis, 2007. Thèse de doctorat dirigée par Dervieux, Alain et Guillard, Hervé Mathématiques École doctorale Sciences fondamentales et appliquées (Nice) 2007 2007NICE4096.
- [18] Y. Mesri, W. Zerguine, H. Digonnet, L. Silva, and T. Coupez, “Dynamic parallel adaption for three dimensional unstructured meshes: Application to interface tracking,” in *Proceedings of the 17th International Meshing Roundtable*, pp. 195–212, Springer, 2008.
- [19] Y. Mesri, M. Khalloufi, and E. Hachem, “On optimal simplicial 3d meshes for minimizing the Hessian-based errors,” *Applied Numerical Mathematics*, 2016.
- [20] G. Jannoun, E. Hachem, J. Veysset, and T. Coupez, “Anisotropic meshing with time-stepping control for unsteady convection-dominated problems,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 7, pp. 1899–1916, 2015.
- [21] Y. Mesri, F. Alauzet, A. Loseille, L. Hascoët, B. Koobus, and A. Dervieux, “Continuous mesh adaptation models for CFD,” *CFD Journal*, vol. 16, no. 4, pp. 346–355, 2008.
- [22] R. C. Almeida, R. A. Feijóo, A. C. Galeao, C. Padra, and R. S. Silva, “Adaptive finite element computational fluid dynamics using an anisotropic error estimator,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 182, no. 3, pp. 379–400, 2000.
- [23] D. Leservoisier, P.-L. George, and A. Dervieux, “Métrique continue et optimisation de maillage,” Research Report RR-4172, INRIA, 2001.
- [24] M.-G. Vallet, C.-M. Manole, J. Dompierre, S. Dufour, and F. Guibault, “Numerical comparison of some Hessian recovery techniques,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 72, no. 8, pp. 987–1007, 2007.
- [25] I. Babuvška and W. Rheinboldt, “Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 15, no. 4, pp. 736–754, 1978.
- [26] I. Babuvška and W. Rheinboldt, “A-posteriori error estimates for the finite element method,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, pp. 1597–1615, Jan. 1978.
- [27] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, no. 7, pp. 1331–1364, 1992.
- [28] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, no. 7, pp. 1365–1382, 1992.
- [29] N.-E. Wiberg and F. Abdulwahab, “Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, no. 16, pp. 2703–2724, 1993.
- [30] N.-E. Wiberg, F. Abdulwahab, and S. Ziukas, “Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, no. 20, pp. 3417–3440, 1994.
- [31] B. Boroomand and O. C. Zienkiewicz, “Recovery by Equilibrium in Patches (rep),” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, no. 1, pp. 137–164, 1997.
- [32] B. Boroomand and O. C. Zienkiewicz, “An improved REP recovery and the effectivity robustness test,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, no. 17, pp. 3247–3277, 1997.



- [33] Z. Zhang and A. Naga, “A New Finite Element Gradient Recovery Method: Superconvergence Property,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 26, no. 4, pp. 1192–1213, 2005.
- [34] A. Agouzal and Y. V. Vassilevski, “Minimization of gradient errors of piecewise linear interpolation on simplicial meshes,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 33–36, pp. 2195–2203, 2010.
- [35] P. Labbé, J. Dompierre, M.-G. Vallet, and F. Guibault, “Verification of three-dimensional anisotropic adaptive processes,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 88, no. 4, pp. 350–369, 2011.
- [36] A. Loseille and F. Alauzet, “Continuous Mesh Framework Part I: Well-Posed Continuous Interpolation Error,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 49, no. 1, pp. 38–60, 2011.
- [37] T. Coupez, “Metric construction by length distribution tensor and edge based error for anisotropic adaptive meshing,” *Journal of Computational Physics*, vol. 230, no. 7, pp. 2391–2405, 2011.
- [38] Y. Mesri, H. Guillard, and T. Coupez, “Automatic coarsening of three dimensional anisotropic unstructured meshes for multigrid applications,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, no. 21, pp. 10500–10519, 2012.
- [39] L. Kamenski and W. Huang, “How a Nonconvergent Recovered Hessian Works in Mesh Adaptation,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 52, no. 4, pp. 1692–1708, 2014.
- [40] J. Peraire, K. Morgan, and J. Peiro, “Unstructured mesh methods for CFD,” 1990.
- [41] J. Peraire, J. Peiró, and K. Morgan, “Adaptive remeshing for three-dimensional compressible flow computations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 103, no. 2, pp. 269–285, 1992.
- [42] D. J. Mavriplis, “Adaptive mesh generation for viscous flows using triangulation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 90, pp. 271–291, Oct. 1990.
- [43] G. C. Buscaglia and E. A. Dari, “Anisotropic mesh optimization and its application in adaptivity,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, no. 22, pp. 4119–4136, 1997.
- [44] M. J. Castro-Díaz, F. Hecht, B. Mohammadi, and O. Pironneau, “Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 25, no. 4, pp. 475–491, 1997.
- [45] A. Tam, D. Ait-Ali-Yahia, M. P. Robichaud, M. Moore, V. Kozel, and W. G. Habashi, “Anisotropic mesh adaptation for 3d flows on structured and unstructured grids,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 189, pp. 1205–1230, Sept. 2000.
- [46] A. Dervieux, D. Leservoisier, P.-L. George, and Y. Coudière, “About theoretical and practical impact of mesh adaptation on approximation of functions and PDE solutions,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 43, pp. 507–516, Oct. 2003.
- [47] P. Labbé, J. Dompierre, M.-G. Vallet, F. Guibault, and J.-Y. Trépanier, “A universal measure of the conformity of a mesh with respect to an anisotropic metric field,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, no. 15, pp. 2675–2695, 2004.
- [48] W. Huang, “Metric tensors for anisotropic mesh generation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 204, no. 2, pp. 633–665, 2005.
- [49] Y. V. Vasilevski and K. N. Lipnikov, “Error bounds for controllable adaptive algorithms based on a Hessian recovery,” *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 45, no. 8, pp. 1374–1384, 2005.

- [50] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. SIAM, 2011.
- [51] M. E. Hachem, *Stabilized finite element method for heat transfer and turbulent flows inside industrial furnaces*. PhD thesis, MINES ParisTech, France, 2009.
- [52] E. Hachem, G. Jannoun, J. Veysset, and T. Coupez, “On the stabilized finite element method for steady convection-dominated problems with anisotropic mesh adaptation,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 232, pp. 581–594, Apr. 2014.
- [53] E. Hachem, B. Rivaux, T. Kloczko, H. Digonnet, and T. Coupez, “Stabilized finite element method for incompressible flows with high Reynolds number,” *Journal of Computational Physics*, vol. 229, no. 23, pp. 8643–8665, 2010.
- [54] S. Brogniez, C. Farhat, and E. Hachem, “A high-order discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for advection–diffusion problems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 264, pp. 49–66, Sept. 2013.
- [55] E. Hachem, G. Jannoun, J. Veysset, M. Henri, R. Pierrot, I. Poitroult, E. Massoni, and T. Coupez, “Modeling of heat transfer and turbulent flows inside industrial furnaces,” *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 30, pp. 35–53, Jan. 2013.
- [56] E. Hachem, S. E. Feghali, T. Coupez, and R. Codina, “A three-field stabilized finite element method for fluid-structure interaction: elastic solid and rigid body limit,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 104, pp. 566–584, Nov. 2015.
- [57] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes, “Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 32, pp. 199–259, Sept. 1982.
- [58] J.-L. Guermond, “Stabilization of Galerkin approximations of transport equations by subgrid modeling,” *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 33, pp. 1293–1316, Nov. 1999.
- [59] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and M. Balestra, “A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the babuška-brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 59, no. 1, pp. 85–99, 1986.
- [60] T. J. R. Hughes, “Multiscale phenomena: Green’s functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 127, no. 1, pp. 387–401, 1995.
- [61] E. Hachem, S. Feghali, R. Codina, and T. Coupez, “Anisotropic adaptive meshing and monolithic Variational Multiscale method for fluid–structure interaction,” *Computers & Structures*, vol. 122, pp. 88–100, June 2013.
- [62] M. G. Larson and A. Målqvist, “Adaptive variational multiscale methods based on a posteriori error estimation: Energy norm estimates for elliptic problems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, no. 21–24, pp. 2313–2324, 2007.
- [63] A. Masud, T. J. Truster, and L. A. Bergman, “A variational multiscale a posteriori error estimation method for mixed form of nearly incompressible elasticity,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, pp. 3453–3481, Nov. 2011.
- [64] A. H. ElSheikh, S. E. Chidiac, and W. S. Smith, “A posteriori error estimation based on numerical realization of the variational multiscale method,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, no. 45–48, pp. 3637–3656, 2008.

- [65] C. Johnson, “Proceedings of the Workshop on Reliability in Computational Mechanics Adaptive finite element methods for diffusion and convection problems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 82, pp. 301–322, Sept. 1990.
- [66] C. Johnson and P. Hansbo, “Adaptive finite element methods in computational mechanics,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 101, no. 1, pp. 143–181, 1992.
- [67] K. Eriksson and C. Johnson, “Adaptive streamline diffusion finite element methods for stationary convection-diffusion problems,” *Mathematics of Computation*, vol. 60, no. 201, pp. 167–188, S1, 1993.
- [68] G. M. Porta, S. Perotto, and F. Ballio, “Anisotropic mesh adaptation driven by a recovery-based error estimator for shallow water flow modeling,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 70, pp. 269–299, Sept. 2012.
- [69] T. J. R. Hughes, G. R. Feijóo, L. Mazzei, and J.-B. Quincy, “Advances in Stabilized Methods in Computational Mechanics The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 166, no. 1, pp. 3–24, 1998.
- [70] R. Rossi, J. Cotella, N. M. Lafontaine, P. Dadvand, and S. R. Idelsohn, “Parallel adaptive mesh refinement for incompressible flow problems,” *Computers & Fluids*, vol. 80, pp. 342–355, 2013.
- [71] Y. Bazilevs, V. M. Calo, J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, A. Reali, and G. Scovazzi, “Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, no. 1–4, pp. 173–201, 2007.
- [72] T. Coupez and E. Hachem, “Solution of high-Reynolds incompressible flow with stabilized finite element and adaptive anisotropic meshing,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 267, pp. 65–85, 2013.
- [73] E. Hachem, M. Khalloufi, J. Bruchon, R. Valette, and Y. Mesri, “Unified adaptive Variational MultiScale method for two phase compressible–incompressible flows,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 308, pp. 238–255, 2016.
- [74] G. Hauke, D. Fuster, and F. Lizarraga, “Variational multiscale a posteriori error estimation for systems: The Euler and Navier–Stokes equations,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 283, pp. 1493–1524, 2015.
- [75] D. Irisarri and G. Hauke, “Pointwise Error Estimation for the One-Dimensional Transport Equation Based on the Variational Multiscale Method,” *International Journal of Computational Methods*, p. 1750040, Oct. 2016.
- [76] D. Irisarri and G. Hauke, “A posteriori pointwise error computation for 2-D transport equations based on the variational multiscale method,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 311, pp. 648–670, Nov. 2016.