Formes asymptotiques d'une surface libre et d'une bulle interagissant à petit nombre de Bond

M. Guémas[a], A. Sellier[b] et F. Pigeonneau[c]

a. LadHyX, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau - Cedex
b. LadHyX, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau - Cedex, antoine.sellier@ladhyx.polytechnique.fr
c. Surface du Verre et Interface, UMR 125 CNRS/Saint-Gobain, 39 Quai Lucien Lefranc - B.P. 135, 93303 Aubervilliers - Cedex, franck.pigeonneau@saint-gobain.com

L'interaction d'inclusions gazeuses avec une surface libre intervenant dans beaucoup de procédés industriels est un problème de mécanique des fluides qui deprime abord peut sembler simple. Néanmoins, il soulève des problèmes fondamentaux que nous allons essayer d'illustrer au cours de cette contribution. Ici on concentre notre attention sur les faibles déformations des interfaces se produisant à faible nombre de Bond qui est un des paramètres sans dimension du problème. On résume ci-dessous les grandes lignes de l'approche analytique choisie et qui sera développée lors de l'exposé.

On considère une bulle immergée dans un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ soumise au champ de gravité $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$g comme illustré sur la FIGURE 1. La surface libre $S_0(t)$ est caractérisée par sa tension de surface γ_0 alors que celle de la bulle $S_1(t)$ est γ_1. Sous l'effet de la gravité, la bulle remonte à une vitesse U dépendant de sa position par rapport à la surface libre. De plus, l'état de contraintes au niveau de chaque interfaces provoque la déformations de ces dernières. L'objectif de ce travail est de prédire à la fois la vitesse de remontée de la bulle et les formes géométriques des interfaces. Dans ce but on se place dans la situation où la bulle est de taille suffisamment petite de telle sorte que le nombre de Reynolds est supposé petit devant l'unité. Ainsi, pour tout point du domaine liquide $\mathcal{D}(t)$, l'écoulement est régi par les équations de Stokes :

$$\mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}p = 0,\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{1}$$

où $\boldsymbol{u}$ et p sont respectivement la vitesse et la pression en excès car tenant compte des forces de gravité. La première de ces deux équations exprime la conservation de la quantité de mouvement et la deuxième celle de la masse. Les conditions à l'infini sont simplement

$$(\boldsymbol{u}, p) \to (\boldsymbol{0}, 0) \text{ si } ||\boldsymbol{x}|| \to \infty. \tag{2}$$

Les conditions de saut au niveau de chaque interface prennent la forme suivante

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} = \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x} + \gamma_0\boldsymbol{\nabla}_S\cdot\boldsymbol{n},\ \text{sur } S_0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} = \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x} + p_0 - p_b + \gamma_1\boldsymbol{\nabla}_S\cdot\boldsymbol{n},\ \text{sur } S_1, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} = 0,\ \text{sur } S_0 \text{ et } S_1, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n},\ \text{sur } S_0 \text{ et } S_1, \tag{6}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ représente le tenseur es contraintes associé à $(\boldsymbol{u}, p)$; p_0 et p_b sont respectivement la pression au dessus de la surface libre et celle régnant dans la bulle ; $\boldsymbol{n}$ est la normale définie sur chaque interface ;

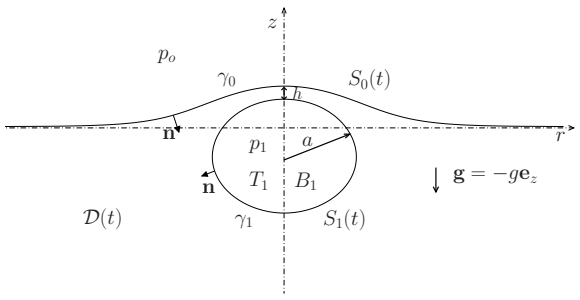


FIGURE 1 – Schèma de l'interface d'une bulle $S_1(t)$ remontant sous l'effet de la gravité $\boldsymbol{g}$ vers une surface libre $S_0(t)$. Le liquide occupe le domaine instationnaire $\mathcal{D}(t)$.

$\boldsymbol{\nabla}_S \cdot \boldsymbol{n}$ correspond à la courbure moyenne locale. Les deux premières équations données ci-dessus correspondent au saut de contrainte normale alors que la troisième exprime la continuité des contraintes tangentielles qui, comme le gaz est supposé non visqueux, se réduit à une condition de cisaillement nulle. La dernière relation exprime la conservation de la masse où $\boldsymbol{V}$ représente la vitesse matérielle des interfaces.

La mise sous forme adimensionnée du problème montre que deux nombres sans dimension suffissent pour décrire la physique qui sont les suivants

$$\mathrm{Bo}_1 = \frac{\rho g a^2}{3\gamma_1},\ \hat{\gamma} = \frac{\gamma_0}{\gamma_1}, \tag{7}$$

où a est le rayon de la bulle lorsqu'elle se trouve loin de la surface libre adoptant une forme sphérique. Bo_1 est un nombre de Bond et $\hat{\gamma}$ est le rapport des deux tensions de surface. L'analyse faite au cours de ce travail repose sur le développement asymptotique en fonction de $\mathrm{Bo}_1 \ll 1$ afin de prédire l'écoulement et la géométrie des interfaces. Le problème général se décline en deux sous-problèmes. Le premier revient à résoudre l'écoulement sur le domaine non déformé (surface libre plane et bulle sphérique) dont on connaît la solution exacte et le deuxiéme se réduit à la détermination de la forme prise par les interfaces. Comme il sera montré lors de la présentation alors que le problème de la détermination de la forme de la surface libre est bien posé, il ne l'est pas pour la forme de la bulle ! Nous montrerons comment résoudre cet écueil. Des résultats de formes de bulles et de surface libre seront montrés et comparés à des solutions numériques obtenues par une méthode d'éléments de frontière.