

Analyse de l'impact du filtrage de conditions au bord bruitées sur un calcul éléments fins

Francesco Bettonte, Sylvia Feld-Payet, Stéphane Andrieux, David Lévêque, Jacques Besson

▶ **To cite this version:**

Francesco Bettonte, Sylvia Feld-Payet, Stéphane Andrieux, David Lévêque, Jacques Besson. Analyse de l'impact du filtrage de conditions au bord bruitées sur un calcul éléments fins. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01815847

HAL Id: hal-01815847

https://minesparis-psl.hal.science/hal-01815847

Submitted on 14 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2017
13ème Colloque National en Calcul des Structures
15-19 Mai 2017, Presqu'île de Giens (Var)

Analyse de l'impact du filtrage de conditions au bord bruitées sur un calcul éléments finis

F. Bettonte[1], S. Feld-Payet[1], S. Andrieux[1], D. Lévêque[1], J. Besson[2]

[1] *ONERA The French Aerospace Lab, {francesco.bettonte, sylvia.feld-payet, stephane.andrieux, david.leveque}@onera.fr*
[2] *Mines ParisTech, Centre des Matériaux, jacques.besson@ensmp.fr*

Résumé — Lors d'une comparaison entre un essai mécanique et sa simulation numérique, il est primordial d'assurer que cette dernière soit représentative du premier. Pour y parvenir, on peut imposer à la simulation une condition au bord issue d'une mesure. Néanmoins, cette solution conduit à imposer de manière incontrôlée le bruit de mesure conduisant à des contraintes numériques artificielles. Ce bruit peut être filtré et cette contribution illustre l'impact du bruit et analyse différentes méthodes de filtrage pour une application aux essais de traction sur matériaux à comportement ductile.
Mots clés — comparaison essai-calcul, corrélation d'images, conditions au bord, bruit de mesure, matériaux ductiles.

1 Introduction

Le pilotage en déplacement contrôlé est une technique utilisée lors d'un essai de traction à rupture lorsque le comportement matériau manifeste un caractère adoucissant. Pour la simulation numérique de l'essai, le modèle prend généralement en compte l'éprouvette seule afin de limiter les coûts de calcul. De plus, on ne dispose généralement pas de données sur la machine de traction ou de données suffisamment précises sur l'assemblage avec l'éprouvette. Imposer alors au modèle numérique la donnée (déplacement uniforme des mors) fournie à la machine de traction ne constituerait qu'une approximation qui peut, de plus, être grossière. C'est pourquoi il est préférable d'imposer à la simulation des conditions au bord issues d'une mesure sur l'éprouvette elle-même. On dispose de plusieurs instruments pour la mesure d'un déplacement tels que les extensomètres, les systèmes de caméras digitales [1] ou encore les tomographes [2]. De nos jours, l'utilisation des systèmes de stéréo-vision est de plus en plus répandue. Elle permet d'obtenir des champs cinématiques sur toute la surface observée. Dans ce cas, pour mener un calcul 3D, on fait le plus souvent une hypothèse de constance dans l'épaisseur [1]. Toutefois, les champs mesurés contiennent une composante de bruit qui, appliquée sans filtrage, conduit à des contraintes numériques artificielles.

Ce travail illustre le problème sur un cas analytique et sur un cas numérique. Différentes solutions pour le filtrage du bruit sont discutées.

2 Illustration de l'impact du bruit

2.1 Cas analytique élastique : problème anti-plan

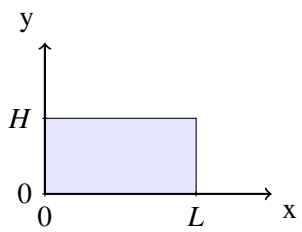


FIGURE 1 – Section du barreau du problème d'élasticité anti-plan.

Le problème peut être illustré sur un barreau homogène à section rectangulaire $(L \times H)$ de longueur infinie comme représenté figure 1. Sur ce barreau un déplacement $u_{z|\Gamma} = u_n^m \sin(\frac{\pi n}{L}x)$, normal au plan de section, est imposé sur le bord supérieur Γ et un déplacement nul est imposé sur la partie restante de la frontière. Pour le problème anti-plan, on peut écrire :

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = u_z(x,y) \tag{1}$$

La composante u_z étant la seule non nulle, elle sera simplement notée u afin de simplifier la notation. Les conditions de compatibilité dans le cadre des petites déformations donnent alors les relations suivantes (toutes les autres composantes étant nulles) :

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

En considérant un comportement élastique, les contraintes σ_{xz} et σ_{yz} (toutes les autres composantes étant nulles) peuvent s'exprimer directement en fonction de ces déformations et de la constante de Lamé $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, avec E et ν le module élastique et le rapport de Poisson respectivement :

$$\sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz} \quad \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} \tag{3}$$

En considérant les efforts volumiques nuls, l'équation de l'équilibre pour ce problème s'écrit :

$$\triangle u(x,y) = 0 \tag{4}$$

La solution de ce problème est :

$$u(x,y) = u_n^m \frac{\sinh(\frac{\pi n}{L}y)}{\sinh(\frac{\pi n}{L}H)} \sin(\frac{\pi n}{L}x) \tag{5}$$

Les dérivées de la solution qui correspondent, au coefficient d'élasticité près, aux contraintes de cisaillement dans la section sont alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = u_n^m \frac{\pi n}{L} \frac{\sinh(\frac{\pi n}{L}y)}{\sinh(\frac{\pi n}{L}H)} \cos(\frac{\pi n}{L}x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = u_n^m \frac{\pi n}{L} \frac{\cosh(\frac{\pi n}{L}y)}{\sinh(\frac{\pi n}{L}H)} \sin(\frac{\pi n}{L}x) \tag{6}$$

L'effet du bruit sur les contraintes de cisaillement est d'autant plus marqué pour les modes élevés car la fréquence n du signal est au numérateur. En effet, l'altération de la contrainte vis-à-vis d'un bruit sinusoïdal de fréquence p et d'amplitude b qui vient s'ajouter à un déplacement imposé régulier est de l'ordre de $\mu\frac{p\pi}{L}|b|$. Cela montre que l'on ne peut pas contrôler l'altération provoquée par le bruit en contrôlant seulement son amplitude. Ceci est illustré en figure 2. Notons que la dépendance en sinus hyperbolique vis-à-vis de y concentre l'effet du bruit au voisinage de $y = H$, conformément à la littérature [2].

L'impact d'un bruit de mesure sur la réponse en contrainte est critique pour le dimensionnement des structures. En effet, les critères de rupture s'appuient essentiellement sur le niveau de contrainte ou de plasticité cumulée. Il est donc primordial de limiter les effets du bruit.

2.2 Cas numérique en plasticité

Afin d'évaluer par la suite les bénéfices d'un filtrage et de comparer les performances de différentes techniques, considérons un cas numérique représentatif d'un essai de traction sur plaque trouée dont la géométrie est présenté figure 3. On impose un encastrement au bord inférieur de la pièce et un déplacement vertical au bord supérieur.

De la même façon que précédemment, on compare deux simulations numériques 3D de l'essai de traction pour deux conditions aux bord ayant la même valeur moyenne dont l'une est altérée par un bruit gaussien à moyenne nulle et d'écart type $\gamma = 10^{-3}$ mm.

Pour quantifier l'impact du bruit sur un résultat $\mathbf{C}$ de la simulation (déplacement, contrainte ou plasticité cumulée - cf. figure 3) par rapport à un calcul de référence, où la mesure non bruitée u_0 a été appliquée comme condition de Dirichlet, on définit ici un coefficient d'altération $\delta_{\mathbf{C}}$.

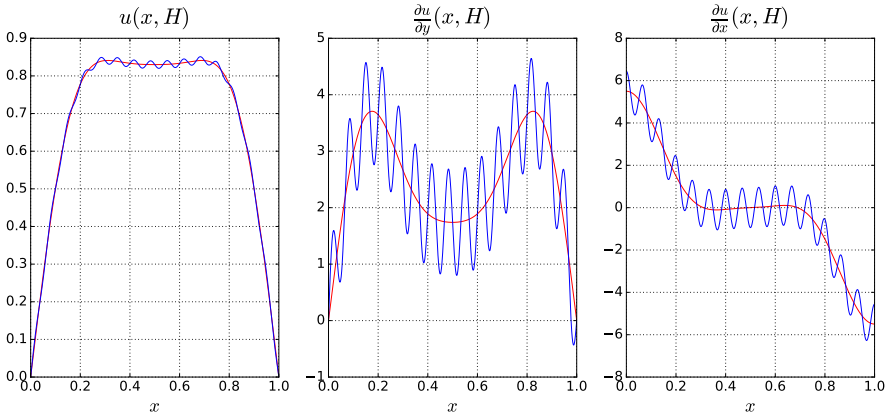


FIGURE 2 – Comparaison des solutions en déplacement et en contrainte sur le bord supérieur ($y = H$) vis-à-vis d'un bruit sinusoïdal ajouté avec $p = 30$ et $b = 0.01\,u_n^m$ pour un barreau avec $H/L = 1.0$. Bien que ce bruit ait relativement peu d'impact sur le déplacement, l'écart entre les contraintes associées à la solution de référence (en rouge) et à la solution bruitée (en bleu) est clairement plus marqué.

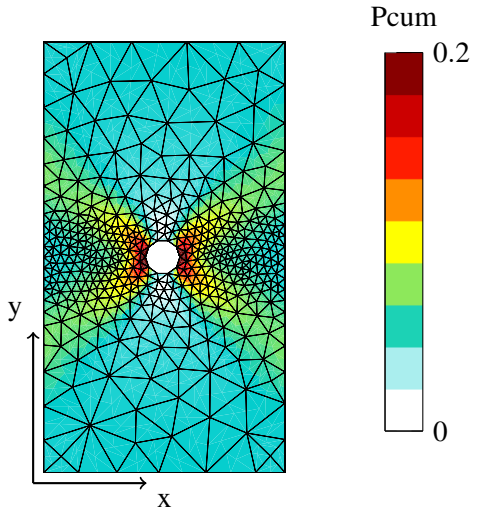


FIGURE 3 – Champ de plasticité cumulée. On note les valeurs non nulles près des bords.

$$\delta_{\mathbf{C}} = \left| \frac{\mathbf{C}(u_b) - \mathbf{C}(u_0)}{\mathbf{C}(u_0)} \right| \tag{7}$$

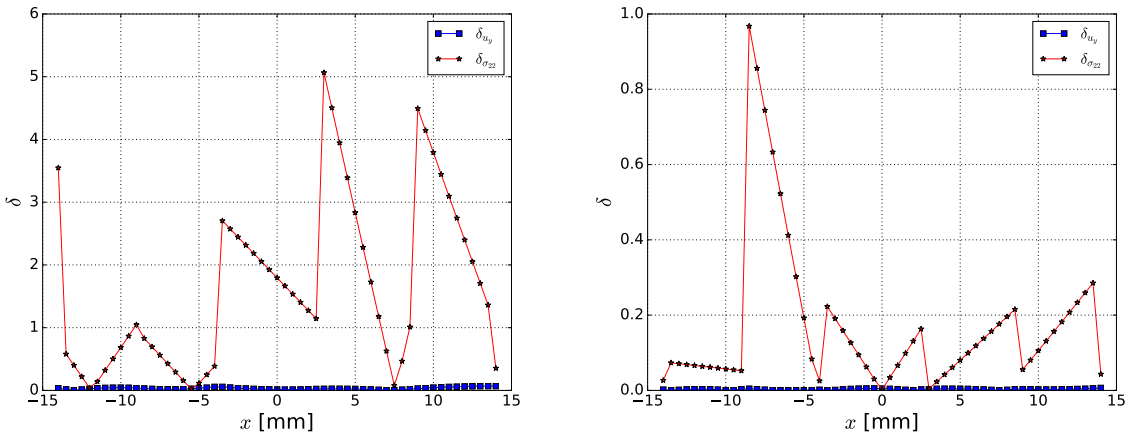
L'évolution de ce coefficient sur le bord supérieur est donné figure 4 pour le déplacement u_y et la composante σ_{22} du champ de contrainte. Comme prévu, on observe un impact modéré (0.5%) sur le déplacement. En revanche, le coefficient d'altération dépasse les 500% pour la contrainte en régime élastique et les 80% en régime plastique, ce qui est considérable.

3 Comparaison de méthodes de filtrage du bruit

L'altération provoquée par l'application d'une condition au bord bruitée peut être réduite par l'application à la condition bruitée d'un filtre passe-bas. Dans cette catégorie de filtres, deux types d'approche sont envisageables. La première consiste à reconstruire une condition lissée à partir de la mesure bruitée. La seconde consiste à régulariser le problème d'un point de vue mécanique.

3.1 Reconstruction de la donnée

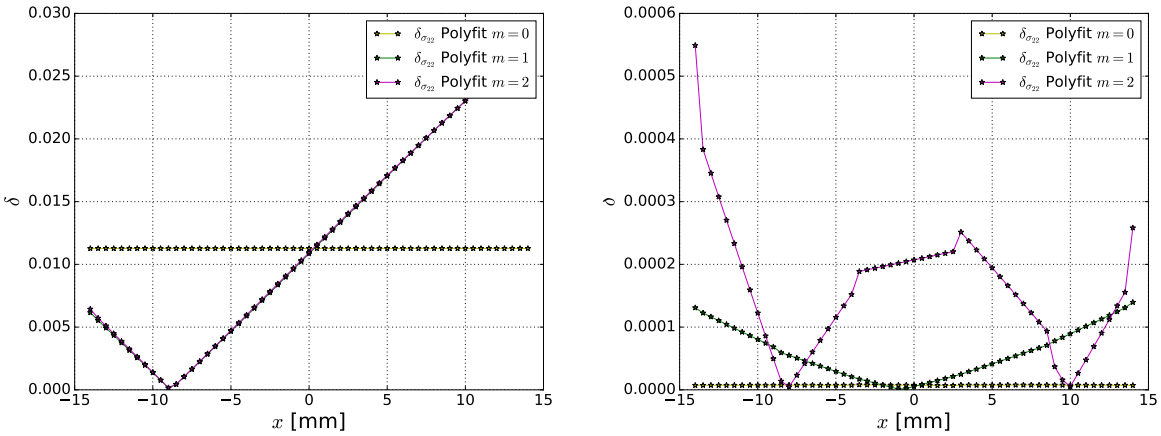
Une première technique de lissage consiste à approcher la condition au bord par un polynôme d'ordre $m \in \mathbb{N}$. Pour des ordres 0, 1 et 2, le coefficient d'altération $\delta_{\sigma_{22}}$ est présenté figure 5. On remarque sa



(a) Régime élastique (b) Régime plastique

FIGURE 4 – Coefficient d'altération δ pour les champs u_y (en bleu) et σ_{22} (en rouge).

valeur fortement réduite par rapport au coefficient associé à la solution du problème avec condition au bord non filtrée figure 4, de deux ordres de grandeur dans le régime élastique et de trois ordres de grandeur dans le régime plastique. Cette solution a été également employée dans [2] pour parvenir à une conclusion analogue à partir de mesures obtenues par corrélation globale volumique. Cependant, cette solution nécessite un a priori sur la mesure pour rester sur des ordres bas du polynôme. Une solution possible à cette limite pourrait être la reconstruction par moindres carrés mobiles [3].



(a) Régime élastique (b) Régime plastique

FIGURE 5 – Coefficient d'altération δ pour différents ordres du polynôme lissant.

3.2 Régularisation mécanique

L'approche la plus simple serait l'application des conditions au bord bruitées via une couche d'éléments pour laquelle le comportement est supposé purement élastique. Le principal intérêt de cette solution est d'éviter la concentration artificielle de plasticité cumulée près des bords. Cependant, il n'est pas toujours possible de faire l'hypothèse que la zone de l'éprouvette où le déplacement est prescrit reste dans le domaine élastique (voir figure 3).

Une deuxième solution plus robuste consiste à imposer la donnée bruitée via une condition au bord de Robin, décrite par l'expression suivante, qui correspond à une liaison élastique :

$$l_R \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \frac{1}{S_\Gamma}(\underline{u}_m - \underline{u}) \tag{8}$$

où l_R est une constante choisie par l'utilisateur et S_Γ l'aire du bord où les conditions bruitées sont imposées. Tout se passe comme si les déplacements étaient appliqués via un ressort de rigidité $\frac{1}{l_R}$ au niveau de la surface Γ.

Cependant, la condition au bord de Robin est une bonne approximation d'une condition de Dirichlet seulement pour des petites valeurs du facteur l_R. En effet, la différence entre la solution Dirichlet et la solution Robin pour $l_R = 5 \cdot 10^{-7}$ mm/N est de l'ordre de 10% sur le déplacement dans le régime élastique. Il faut donc trouver un compromis au niveau du choix du coefficient : l_R doit être le plus petit possible pour limiter l'altération, mais suffisamment grand pour régulariser le problème. En effet, c'est ici l_R qui prend le rôle de paramètre de régularisation ou de compromis.

On propose alors d'utiliser l'information sur le bruit lui-même pour réaliser ce compromis au travers d'une condition du type Discrepancy Criterion de Morozov [5]. L'idée est de ne pas demander à la solution une précision supérieure à celle des mesures : autrement dit, l'altération de la solution est acceptable dans la limite de l'incertitude de mesure dénotée $\gamma = ||\underline{u}_b - \underline{u}||_\Gamma$, avec $\underline{u}_b$ le champ bruité et $\underline{u}$ le champ "vrai". On cherche donc le facteur l_R qui vérifie l'équation suivante :

$$\left|\left|\underline{u}_b - \underline{u}_{l_R}\right|\right|_\Gamma = \gamma \tag{9}$$

avec $\underline{u}_{l_R}$ solution du problème avec condition au bord de Robin dont la formulation variationnelle est :

$$a(\underline{u}_{l_R}, \underline{v}) + \int_\Gamma \frac{1}{l_R S_\Gamma} (\underline{u}_{l_R} - \underline{u}_b)\underline{v}\, \mathrm{dS} = l(\underline{v}) \tag{10}$$

avec $a(\underline{u}_{l_R}, \underline{v})$ la forme bilinéaire :

$$a(\underline{u}_{l_R}, \underline{v}) = \int_\Omega \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_{l_R}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v})\, \mathrm{d}\Omega \tag{11}$$

et $l(\underline{v})$ le travail des efforts extérieurs.

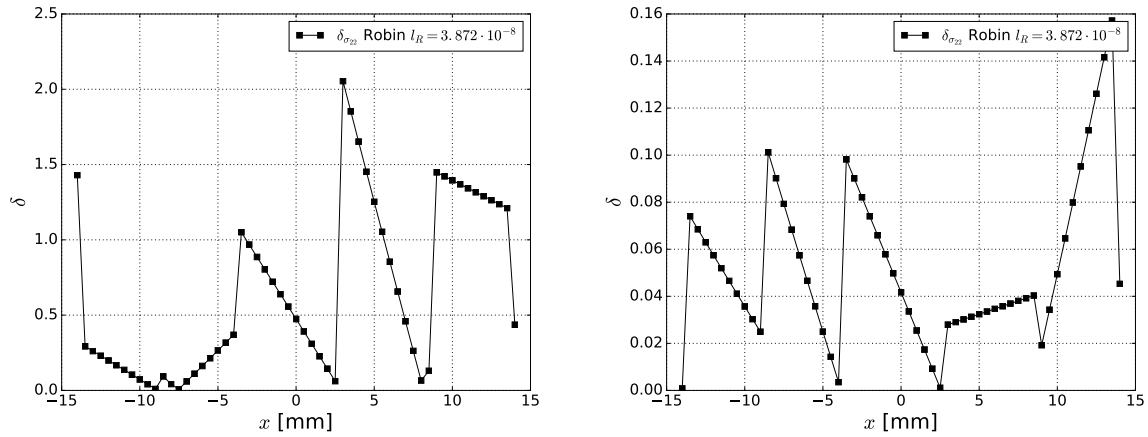
La résolution de ce système en $(\underline{u}_{l_R}, l_R)$ est non linéaire. Néanmoins, puisque l'on cherche à déterminer une valeur petite de l_R, on peut faire une estimation de celui-ci en utilisant un développement asymptotique de $\underline{u}_{l_R}$ autour de $l_R = 0$. Cette hypothèse permet de résoudre le système pour parvenir à une estimation du coefficient optimal :

$$l_R = \frac{\gamma}{S_\Gamma ||\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_b) \cdot \underline{n}||_\Gamma} \tag{12}$$

Dans cette dernière équation, $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_b)$ est la solution du problème où la condition type Dirichlet bruitée est appliquée directement. La méthode consiste donc à résoudre d'abord le problème avec condition Dirichlet pour déterminer le coefficient l_R associé, puis à résoudre le problème Robin avec ce dernier.

Néanmoins, il n'est pas envisageable de faire ce calcul préalable pour chaque niveau du chargement, donc à chaque pas de temps. L'idée serait alors de garder l_R constant pour toute la simulation et de l'estimer sur la partie élastique de la réponse, car l'équation (12) a été obtenue pour un comportement purement élastique. Cette estimation est alors faite au niveau maximum des contraintes afin d'avoir la valeur la plus petite possible de l_R.

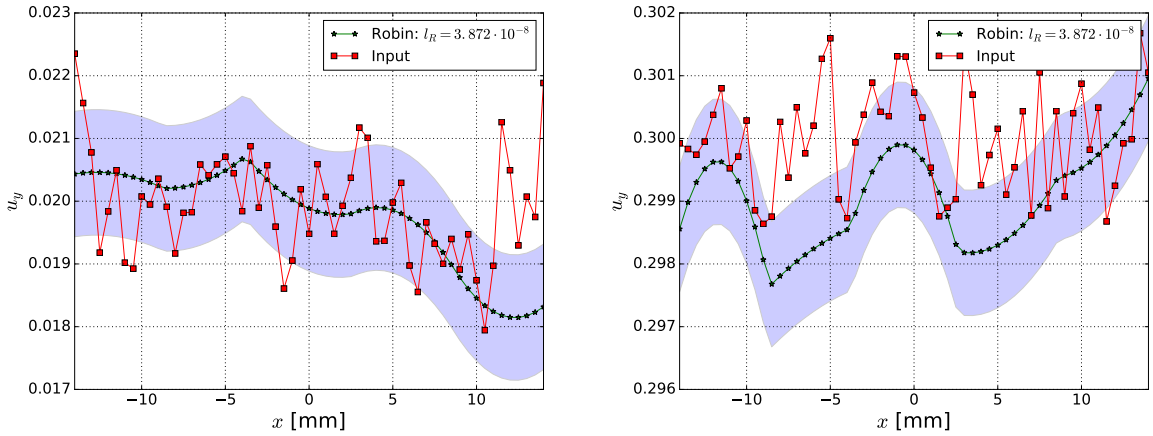
L'estimation de l_R pour le problème considéré donne $l_R = 3,872 \cdot 10^{-8}$ mm/N, ce qui permet de réduire l'impact du bruit sur le champ des contraintes d'un facteur supérieur à 2 dans le régime élastique et d'un facteur 6 dans le régime plastique par rapport à la solution Dirichlet bruitée (voir figure 6). Cette estimation permet bien de respecter la condition de Morozov imposée car la norme $||\underline{u}_b - \underline{u}||_\Gamma$ vaut approximativement 10^{-3} mm, ce qui était la valeur imposée pour γ. Pour le visualiser, on peut tracer le déplacement au bord issu de la simulation avec condition au bord de Robin pour la comparer à la donnée imposée sur ce bord (voir figure 7) : les deux courbes sont bien proches dans le régime élastique et relativement plus éloignées dans le régime plastique. Dans ce dernier cas, la condition de Morozov n'est pas respectée comme on pouvait s'y attendre. En effet l_R était déterminé en régime élastique. Cependant, étant donné que l'écart entre les moyennes est inférieur à 0.1%, l'approximation reste acceptable.



(a) Régime élastique

(b) Régime plastique

FIGURE 6 – Coefficient d'altération δ pour une condition au bord de Robin avec $l_R = 3,872 \cdot 10^{-8}$.



(a) Régime élastique

(b) Régime plastique

FIGURE 7 – Solution sur le bord supérieur du problème avec condition au bord de Robin (en vert) et donnée bruitée imposée (en rouge). La bande de dispersion en bleu clair illustre le fait que la condition de Morozov imposée est bien respectée en régime élastique. C'est n'est pas le cas pour le régime plastique mais la solution reste acceptable du fait du faible écart entre les valeurs moyennes.

4 Discussion

Bien que la reconstruction polynomiale de la condition au bord ait donné un meilleur résultat sur ce cas particulier où le signal de départ était une constante appliquée sur un bord rectiligne loin de toute singularité, elle peut ne pas être adaptée à des cas plus complexes.

Ainsi si l'on considère l'essai de traction sur l'éprouvette du premier Sandia Challenge [6] schématisée figure 8, il est clair que la partie cachée de l'éprouvette ne sera pas modélisée si on veut appliquer à la simulation des déplacements issus d'une mesure. Ces déplacements ne peuvent être appliqués qu'à une partie de l'éprouvette dont les bords sont relativement proches de la zone où il y a une concentration des déformations (voir maillage figure 8). Par conséquent sur ces bords le déplacement ne peut pas être approché par un polynôme d'ordre faible (voir figure 9). De plus, il est nécessaire de piloter la simulation par les déplacements verticaux et horizontaux, ce qui ajoute du bruit au problème par rapport à la plaque trouée où seul le déplacement vertical était imposé.

Les effets du bruit de la condition au bord sont visibles figure 10 où on aperçoit de la plasticité cumulée artificielle sur le bord pour une entrée non filtrée.



FIGURE 8 – Essai de traction sur une éprouvette complexe. Schéma de l'essai à gauche et maillage utilisé pour la simulation à droite.

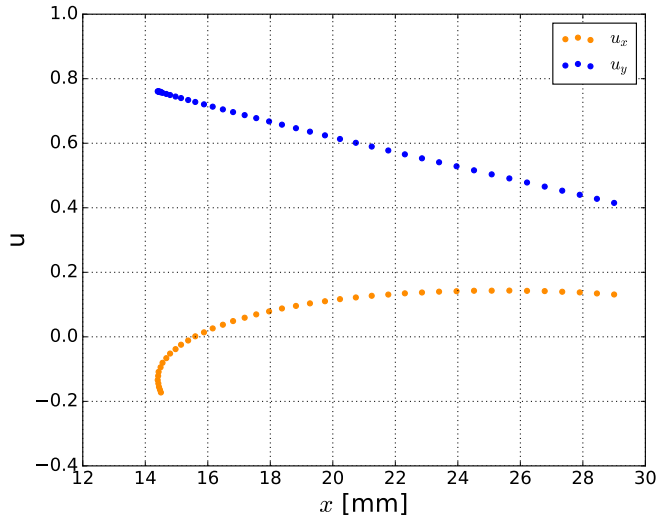


FIGURE 9 – Profil de déplacement sur le bord supérieur pour éprouvette Sandia. Le déplacement u_x ne peut pas être approximé par un polynôme d'ordre faible.

La régularisation mécanique par la condition de Robin constitue dans ce cas une solution intéressante car les deux coefficients de filtrage (un par bord) peuvent être déterminés facilement et valent $l_R = 3.456 \cdot 10^{-8}$ pour le bord supérieur et $l_R = 3.059 \cdot 10^{-8}$ pour le bord inférieur. L'effet bénéfique de ce filtrage est visible en figure 10 où la plasticité artificielle sur les bords est considérablement réduite.

Encore une fois, la condition de Morozov est bien respectée car la norme $||\underline{u}_b - \underline{u}||_\Gamma$ sur le bord supérieur est inférieure à $6 \cdot 10^{-4}$ mm pour une incertitude $\gamma = 10^{-3}$ mm. On constate visuellement en figure 11 que l'écart entre la solution avec condition au bord de Robin et la donnée bruitée imposée est faible tant dans le régime élastique que dans le régime plastique sur u_y.

5 Conclusion

L'effet nocif d'un bruit de mesure appliqué à un calcul éléments finis a été montré. Les différentes solutions testées se sont révélées toutes bénéfiques pour mener à bien la simulation pour la plaque trouée. À noter que la reconstruction de la condition au bord par un polynôme a montré les valeurs les plus faibles du coefficient d'altération. Néanmoins, ce cas était très favorable à une reconstruction polynomiale car le signal de départ non bruité était lui-même un polynôme d'ordre faible, ici une constante. Dans le cas plus général, par exemple lorsque l'on n'a pas de connaissances a priori sur la forme des champs cinématiques, la régularisation mécanique par une condition au bord de Robin pourrait être une solution plus robuste. Une autre piste intéressante à étudier serait le moindre carré mobile [3].

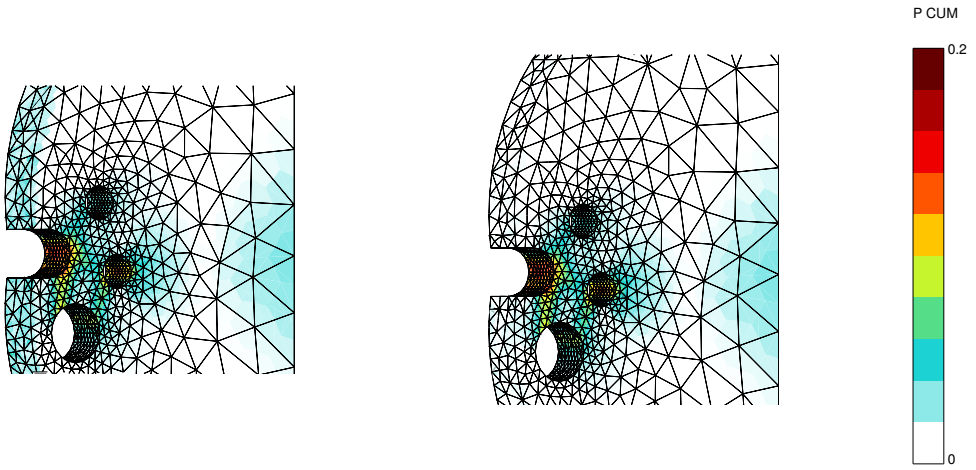
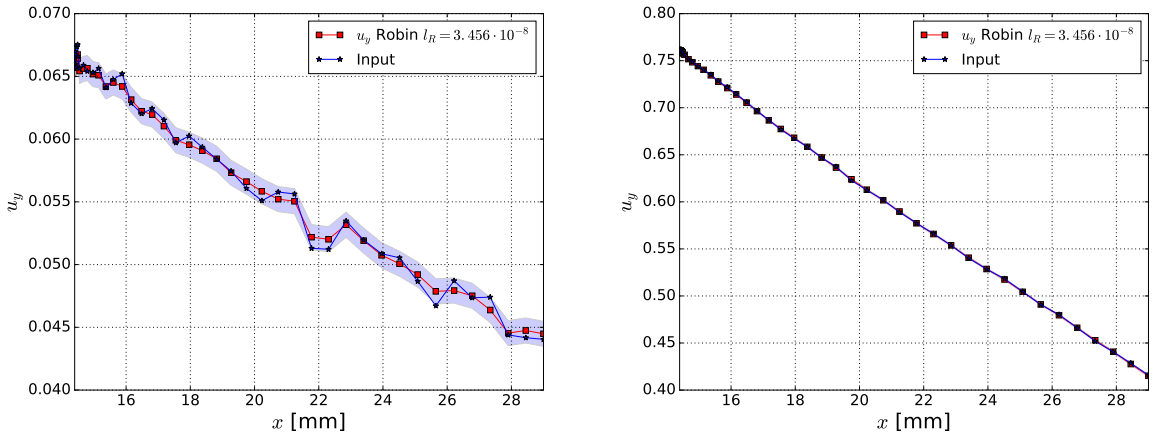


FIGURE 10 – Plasticité cumulée sur une portion d'éprouvette complexe pour des conditions au bord non filtrées à gauche et conditions au bord filtrées par la condition de Robin à droite. On peut noter que le bruit de mesure non filtré amène à des valeurs artificielles près du bord ; cet effet est largement atténué par le filtrage.



(a) Régime élastique

(b) Régime plastique

FIGURE 11 – Solution sur le bord supérieur du problème avec condition au bord de Robin (en bleu) et donnée bruitée imposée (en rouge). La bande de dispersion en bleu clair illustre le fait que la condition de Morozov imposée est bien respectée en régime élastique et plastique.

Références

[1] Z. Wei et al., *Modeling of mixed-mode crack growth in ductile thin sheets under combined in-plane and out-of-plane loading*, Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 3082-3101, 2011.

[2] F. Hild et al., *Toward 4D mechanical correlation*, Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences, Springer, 3-17, 2016.

[3] D. Levin, *The approximation power of moving least squares*, Mathematics of Computation, AMS, 1517-1531, 1998.

[4] William S. Slaughter, *The linearized theory of elasticity*, Birkhäuser Boston, 2002.

[5] Morozov, V. A. *On the solution of functional equations by the method of regularization*, Soviet Mathematics Doklady, 7, 414 – 417, 1966.

[6] Boyce B. L. et al. *The Sandia Fracture Challenge : blind round robin predictions of ductile tearing*, International Journal of Fracture, 186, 5 – 68, 2014.